Министерство образования Российской Федерации

Санкт-Петербургский государственный институт
точной механики и оптики (технический университет)

Кафедра теоретической физики и механики

Ю.А. Борисов, А.Г. Кривошеев, Г.И. Мельников

Теоретическая механика

Часть I. Кинематика

Сборник заданий
для самостоятельной работы студентов

Под общей редакцией проф. Г.И. Мельникова

Санкт - Петербург
2002

УДК 531.2

Борисов Ю. А., Кривошеев А. Г., Мельников Г. И.
Теоретическая механика. Часть I. Кинематика.
Сборник заданий для самостоятельной работы студентов
/ Под общей редакцией проф. Г. И. Мельникова. -
СПб: СПбГИТМО(ТУ), - 2002. - 66 с.

В пособии излагаются следующие разделы кинематики: кинематика точки, кинематика твердого тела и сложное движение точки. Даются основные понятия и сведения из теории в конспективной форме, а также расчетные формулы. Приведены примеры выполнения типовых расчетно-графических работ и исходные данные различных уровней сложности для самостоятельной работы студентов.

Предназначено для студентов всех инженерных специальностей, изучающих курс теоретической механики.

Рецензенты:
д-р физ.-мат. наук, проф. М. П. Юшков (СПбГУ),
к-т техн. наук, доц. Ю. А. Торопов (СПбГЭТУ).

Утверждено к изданию Ученым советом
естественнонаучного факультета СПбГИТМО(ТУ),
протокол №6 от 21 мая 2002 г.

ОГЛАВЛЕНИЕ

ВВЕДЕНИЕ

Теоретическая механика – фундаментальная наука о законах и уравнениях движения материальных систем (тел, механизмов, приборных устройств, множества частиц и т.д.). Одна из главных задач механики – построение и исследование математических моделей объектов с применением символьных и численных расчетов на компьютере. Во многих практических задачах математическими моделями являются алгебраические или обыкновенные дифференциальные уравнения, либо системы таких уравнений. При исследовании этих моделей используются многие разделы высшей математики.

В то же время теоретическая механика направлена на широкое применение в инженерной практике. Математические модели, создаваемые на основе механики, служат базой для анализа и синтеза приборных систем, для выбора оптимальных значений параметров механических конструкций. Отметим также, что многие приборы и устройства работают на принципах теоретической механики.

В данном пособии дано изложение *кинематики* - раздела теоретической механики, в котором содержится математическое описание механических движений объектов. В кинематике рассматриваются способы задания различных видов движения тел и механизмов в виде функциональных уравнений, а также методы определения по этим уравнениям траекторий, скоростей и ускорений отдельных точек тел и механизмов. В этом разделе механики изучаемое движение считается заданным и не рассматриваются причины, вызвавшие это движение, то есть не применяется понятие *силы*.

В качестве моделей реальных материальных тел используются:

- *геометрическая* и *материальная точка* – тело, форма и размеры которого в условиях данной задачи несущественны;
- *абсолютно твердое тело* – тело, для которого его форма и расстояния между любыми его точками не изменяются (или эти изменения считаются пренебрежимо малыми).

Твердые тела, связанные друг с другом тем или иным образом (например, с помощью шарниров) образуют *механизмы*, которые используются с целью преобразования движений одного вида к другому.

ГЛАВА 1. КИНЕМАТИКА ТОЧКИ

Рассмотрим движение точки в плоскости относительно прямоугольной декартовой системы координат *Oxy* (рис.1). Непрерывная линия *AB*, которую описывает движущаяся точка с течением времени, называется *траекторией*. В зависимости от формы траектории различают *прямолинейные* и *криволинейные* движения точки.

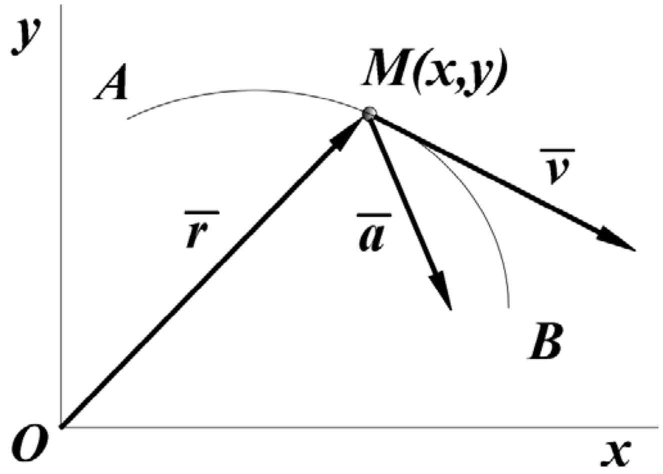


Рис 1. Векторы скорости и ускорения точки, движущейся в плоскости.

Для задания положения движущейся точки используют *векторный, координатный* или *естественный способы задания движения.*

1.1 Векторный способ задания движения точки

В векторном способе задания движения точки ее положение в любой момент времени определяют радиусом-вектором $\bar{r} = \overline{OM}$, проведенным из начала координат O в движущуюся точку M (рис.1), то есть векторной функцией

$$\bar{r} = \bar{r}(t). \qquad (1.1)$$

Конкретная функция (1.1) определяет *закон движения точки в векторной форме*. Вектор $\bar{r}(t)$ изменяется в общем случае по величине и по направлению.

Основными кинематическими характеристиками движения точки являются скорость и ускорение, которые являются векторными величинами.

Скоростью точки называют вектор $\bar{v}$, равный первой производной по времени t от ее радиуса-вектора $\bar{r}$, то есть от векторной функции $\bar{r}(t)$:

$$\bar{v} = \dot{\bar{r}} \quad \text{или} \quad \bar{v} = \frac{d\,\bar{r}}{d\,t}\ . \tag{1.2}$$

Здесь использован принятый в механике *символ дифференцирования по времени* в виде точки, расположенный *над* дифференцируемой функцией.

Вектор скорости направлен по касательной к траектории точки в сторону ее движения (рис.1).

Ускорением точки называется вектор $\bar{a}$, равный первой производной по времени t от ее скорости $\bar{v}$ или второй производной от ее радиуса-вектора $\bar{r}$:

$$\bar{a} = \dot{\bar{v}} = \ddot{\bar{r}} \quad \text{или} \quad \bar{a} = \frac{d\,\bar{v}}{d\,t} = \frac{d^2\,\bar{r}}{d\,t^2}. \tag{1.3}$$

При криволинейном движении точки в плоскости Oxy ускорение расположено в этой плоскости и отклонено от скорости *в сторону вогнутости* траектории точки (рис.1). При прямолинейном движении точки векторы скорости и ускорения направлены вдоль траектории в одну сторону или противоположные стороны.

1.2 Координатный способ задания движения точки

В координатном способе задания движения точки положение точки в любой момент времени определяется зависимостями ее декартовых координат от времени

$$x = x(t), \qquad y = y(t). \tag{1.4}$$

Уравнения (1.4) представляют собой *уравнения движения точки в координатной форме.* Они одновременно являются уравнениями траектории *в параметрической форме*, в которых роль параметра выполняет время t.

На основании формулы (1.2) проекции v_x, v_y скорости точки $\bar{v}$ равны первым производным по времени от соответствующих координат точки:

$$v_x = \dot{x}, \quad v_y = \dot{y} \quad \text{или} \quad v_x = \frac{dx}{dt}, \quad v_y = \frac{dy}{dt}. \tag{1.5}$$

Модуль скорости v и ее *направляющие косинусы* определяются формулами

$$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2}; \ \cos(\bar{v}, x) = v_x / v, \ \cos(\bar{v}, y) = v_y / v. \tag{1.6}$$

Проекции a_x, a_y ускорения точки на координатные оси равны первым производным по времени от проекций скорости или вторым производным от соответствующих координат точки:

$$a_x = \dot{v}_x = \ddot{x}, \quad a_y = \dot{v}_y = \ddot{y}. \tag{1.7}$$

Модуль ускорения a и его направляющие косинусы определяются по формулам

$$a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2}; \quad \cos(\bar{a}, x) = a_x / a, \quad \cos(\bar{a}, y) = a_y / a. \tag{1.8}$$

1.3 Естественный способ задания движения точки

Естественный способ задания движения точки используется в тех случаях, когда траектория ее движения заранее известна. Если кривая *AB* является траекторией точки *M* (рис.2), то положение точки *M* на этой траектории можно однозначно определить *криволинейной координатой s*.

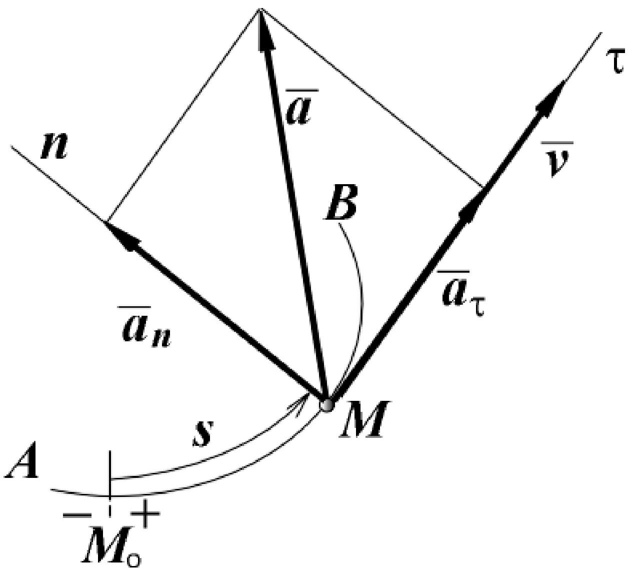


Рис 2. Векторы скорости и ускорения точки при естественном способе задания ее движения в плоскости.

Координата s отсчитывается от некоторой фиксированной точки M_0 (начало отсчета) вдоль траектории и берется с соответствующим знаком. Чтобы знать положение точки M на траектории в любой момент времени, надо задать зависимость криволинейной координаты от времени

$$s = s(t) . \tag{1.9}$$

Уравнение (1.9) выражает *закон движения точки* при естественном способе задания ее движения. Отметим, что величина s в общем случае не равна пройденному точкой пути.

Скорость и ускорение точки при естественном способе задания движения определяют по их проекциям на подвижные прямоугольные оси $M\tau n$, имеющие начало в точке M и движущиеся вместе с нею (рис.2). Ось $M\tau$ направлена по касательной к траектории в сторону положительного отсчета координаты s, а ось Mn - по нормали к траектории в сторону ее вогнутости. Орты этих осей обозначим соответственно $\overline{\tau}$ и $\overline{n}$.

Скорость точки $\overline{v}$, направленная по касательной к траектории, определяется одной проекцией v_τ, равной первой производной по времени от криволинейной координаты s:

$$\overline{v} = v_\tau \overline{\tau}, \qquad v_\tau = \dot{s}. \tag{1.10}$$

Вектор ускорения $\overline{a} = a_\tau \overline{\tau} + a_n \overline{n}$ имеет проекцию a_τ на касательную, равную первой производной по времени от проекции скорости v_τ или второй производной от координаты s, и проекцию на нормаль a_n, равную отношению квадрата скорости к радиусу кривизны траектории в данной точке:

$$a_\tau = \dot{v}_\tau = \ddot{s}, \qquad a_n = v_\tau^2 / \rho. \tag{1.11}$$

Величины a_τ и a_n называют *касательным* и *нормальным* ускорениями точки. Касательное ускорение характеризует изменение скорости по величине, а нормальное – по направлению.

Модули скорости и ускорения точки определяются по формулам

$$v = |v_\tau|; \qquad a = \sqrt{a_\tau^2 + a_n^2}. \tag{1.12}$$

Если известны касательное ускорение точки $a_\tau(t)$ и начальные значения скорости v_0 и криволинейной координаты s_0 в момент времени $t_0 = 0$, то в последующие моменты времени скорость и положение точки на траектории могут быть найдены по следующим формулам:

$$v_\tau(t) = v_0 + \int\limits_0^t a_\tau(t)\,dt; \quad s(t) = s_0 + \int\limits_0^t v_\tau(t)\,dt. \qquad (1.13)$$

В частном случае *равнопеременного криволинейного движения,* когда $a_\tau = a_0 = const$ формулы (1.13) принимают вид

$$v_\tau(t) = v_0 + a_0 t; \qquad s(t) = s_0 + v_0 t + a_0 t^2 / 2. \qquad (1.14)$$

Если v_τ и a_0 имеют одинаковые знаки (произведение $v_\tau \cdot a_0 > 0$), движение будет *равноускоренным*, а если разные знаки ($v_\tau \cdot a_0 < 0$) - *равнозамедленным*. При $a_0 = 0$ точка совершает *равномерное движение* с постоянной скоростью $v_\tau = v_0 = const$, причем ускорение точки равно только нормальному ускорению: $a = a_n = v^2 / \rho$.

1.4 Касательное и нормальное ускорения

Для определения касательного ускорения точки при ее движении, заданном координатным способом с помощью функций (1.4), вводится орт касательной $\overline{\tau} = \overline{v} / v$, сонаправленный с вектором скорости. Проецируя вектор ускорения $\overline{a}$ на этот орт, получаем формулу

$$a_\tau = \overline{a} \cdot \overline{\tau} = \frac{\overline{v} \cdot \overline{a}}{v} = \frac{v_x a_x + v_y a_y}{v}. \qquad (1.15)$$

Величины, входящие в правую часть этой формулы, вычисляются согласно (1.5), (1.6), (1.7). При $a_\tau > 0$ векторы $\overline{v}$ и $\overline{a}_\tau$ имеют одинаковые направления вдоль касательной, а при $a_\tau < 0$ – противоположные. Если в данный момент точка остановилась ($v = 0$), то $a_n = 0$ и ускорение точки $\overline{a} = \overline{a}_\tau$ определяется проекциями a_x, a_y.

Нормальное ускорение точки

$$a_n = \sqrt{a^2 - a_\tau^2} = \frac{\left| v_x\, a_y - v_y\, a_x \right|}{v}. \tag{1.16}$$

Далее приведем пример выполнения задания 1 по данной теме и исходные данные для самостоятельной работы.

1.5 Задание 1. Определение скорости и ускорения точки по заданным уравнениям ее движения

По заданным уравнениям движения точки *M*:

$$x = 3t\ (см); \quad y = 2t^2\ (см)$$

установить вид ее траектории и для момента времени $t = t_1$ (с) найти положение точки на траектории, ее скорость, полное, касательное и нормальное ускорения, а также радиус кривизны траектории.

Решение. Для определения вида траектории найдем *уравнение траектории*, показывающее зависимость между координатами x и y движущейся точки. Выразив из первого, более простого, уравнения время $t = x/3$ и подставив во второе, получим уравнение траектории в виде $y = \frac{2}{9}x^2$. Следовательно, траекторией точки является ветвь параболы с вершиной в начале координат (рис.3). При графическом изображении траектории масштабы по осям Ox и Oy следует выбрать одинаковыми.

Положение точки *M* на траектории в заданный момент времени $t_1 = 1\ (c)$ находим путем вычисления ее координат:

$$x(t_1) = 3 \cdot 1 = 3\ (см); \qquad y(t_1) = 2 \cdot 1^2 = 2\ (см).$$

Скорость и ускорение точки определяем по их проекциям на координатные оси:

$$v_x = \dot{x} = (3t)^{\dot{}} = 3;$$

$$v_y = \dot{y} = (2t^2)^{\dot{}} = 4t; \qquad v_y(t_1) = 4;$$

$$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2}; \qquad v(t_1) = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5 \ (см/с).$$

$$a_x = \dot{v}_x = (3)^{\dot{}} = 0;$$

$$a_y = \dot{v}_y = (4t)^{\dot{}} = 4 \ ;$$

$$a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2}; \qquad a(t_1) = 4 \ (см/с^2).$$

Касательное и нормальное ускорения точки находим по формулам (1.15), (1.16):

$$a_\tau = \frac{v_x a_x + v_y a_y}{v}; \qquad a_\tau(t_1) = \frac{3 \cdot 0 + 4 \cdot 4}{5} = 3.2 \ (см/с^2).$$

$$a_n = \frac{|v_x a_y - v_y a_x|}{v}; \qquad a_n(t_1) = \frac{|3 \cdot 4 - 4 \cdot 0|}{5} = 2.4 \ (см/с^2).$$

Радиус кривизны траектории в рассматриваемом положении точки определяется из формулы (1.11):

$$\rho = v^2 / a_n; \qquad \rho(t_1) = 5^2 / 2.4 \approx 10.4 \ (см).$$

Полученные результаты отобразим на рисунке (рис. 3). Векторы $\bar{v}$ и $\bar{a}$ строим по их проекциям v_x, v_y и a_x, a_y в выбранных масштабах. Масштабы по координатам, скорости и ускорению не обязательно должны быть одинаковыми. Их следует выбирать так, чтобы обеспечить приемлемые размеры и наглядность рисунка. Вектор скорости $\overline{v}$ должен совпадать по направлению с касательной к траектории, а вектор ускорения $\overline{a}$ направлен в сторону вогнутости траектории. Построенный вектор $\overline{a}$ разложим на составляющие по касательной (касательное ускорение $\overline{a}_\tau$) и по нормали (нормальное ускорение $\overline{a}_n$). В качестве контроля правильности решения рекомендуется убедиться в совпадении величин a_τ и a_n, полученных измерением по рисунку длин векторов $\overline{a}_\tau$ и $\overline{a}_n$, с их значениями, полученными аналитически.

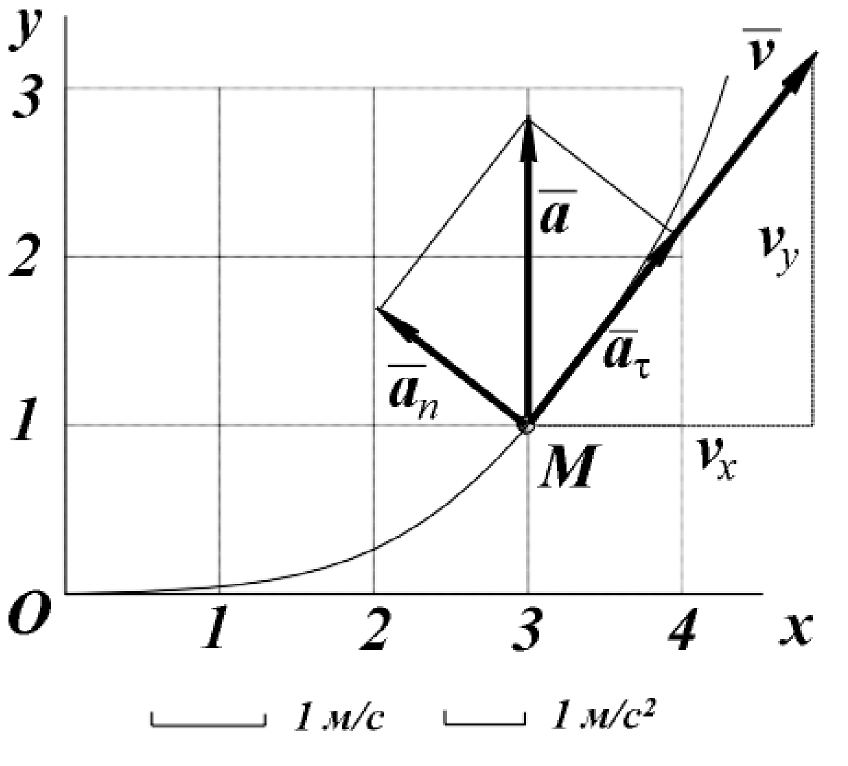


Рис 3. Графическое изображение результатов выполнения задания 1.

Далее приводятся три варианта исходных данных для самостоятельного выполнения данного задания.

Задание 1.1.

№	$x = x(t)$, *см*	$y = y(t)$, *см*	t_1, *с*
1	$3t$	$3t^2 - 2$	1
2	$(2t - 3)^2$	$4t$	0.5
3	$-3t$	$6t^2 + 3$	0.5
4	$-2t^2 + 3$	$3t$	1
5	$3t$	$-5t^2 + 2$	1
6	$2t^2 - 4$	$-2t$	0.5
7	$-3t$	$-6t^2 + 1$	0.5
8	$-4t^2 + 1$	$-3t$	1
9	$2t$	$6t^2 - 4$	1
10	$(6t - 2)^2$	$3t$	0.5
11	$-2t$	$4t^2 - 1$	0.5
12	$-6t^2 + 4$	$2t$	1
13	$2t$	$-3t^2 - 3$	1
14	$6t^2 + 2$	$-3t$	0.5
15	$-2t$	$-5t^2 + 4$	1
16	$-2t^2 + 3$	$-5t$	1
17	$4t$	$5t^2 - 1$	1
18	$(4t - 1)^2$	$2t$	0.5
19	$-4t$	$3t^2 - 2$	1
20	$-4t^2 + 2$	$4t$	0.5
21	$4t$	$-6t^2 + 3$	0.5
22	$4t^2 - 3$	$-4t$	1
23	$-4t$	$-3t^2 + 4$	1
24	$-6t^2 - 1$	$-2t$	0.5

Задание 1.2.

В этом задании при построении уравнения траектории следует выразить синусы и косинусы одинакового аргумента $k\,t\;(k = const)$ из заданных уравнений движения точки и воспользоваться тождеством $\sin^2(k\,t) + \cos^2(k\,t) = 1$. В результате получается уравнение траектории в следующем виде:

$$\frac{(x - x_0)^2}{a^2} + \frac{(y - y_0)^2}{b^2} = 1 \qquad (\,a > 0;\, b > 0\,).$$

Следовательно, траекторией точки является эллипс с полуосями, равными a и b, и с центром в точке (x_0, y_0). В частном случае, когда $a = b$, траекторией точки является окружность с радиусом $R = a = b$.

№	$x = x(t)$, см	$y = y(t)$, см	t_1, с
1	$\sin(2t) + 3$	$\cos(2t) + 4$	$\pi/6$
2	$3\sin(\pi t/3)$	$-2\cos(\pi t/3) + 2$	1
3	$4\cos(\pi t^2/3) + 2$	$-4\sin(\pi t^2/3) - 3$	1
4	$-4\sin(\pi t^2/6) + 3$	$4\cos(\pi t^2/6) + 2$	1
5	$6\sin(\pi t/2)$	$8\cos(\pi t/2) - 1$	5
6	$3\cos(t)$	$-5\sin(t) + 3$	$\pi/4$
7	$-2\cos(2t)$	$\sin(2t) + 3$	$\pi/4$
8	$-3\sin(\pi t/3) - 1$	$-3\cos(\pi t/3)$	1
9	$3\cos(\pi t^2/3) - 1$	$2\sin(\pi t^2/3) + 2$	1
10	$4\sin(\pi t^2/6)$	$-2\cos(\pi t^2/6) - 3$	1
11	$-\sin(\pi t/2) + 1$	$\cos(\pi t/2) + 2$	1/3
12	$5\sin(t) + 1$	$3\cos(t) - 3$	$\pi/4$
13	$2\cos(2t) + 3$	$-3\sin(2t) + 2$	$\pi/3$

№	$x = x(t)$, см	$y = y(t)$, см	t_1, с
14	$2\cos(\pi t/3)$	$3\sin(\pi t/3) + 1$	1
15	$\cos(\pi t^2/3)$	$2\sin(\pi t^2/3) + 4$	1
16	$\cos(\pi t) + 1$	$2\sin(\pi t)$	2/3
17	$2\sin(2t) - 3$	$\cos(2t) - 4$	$\pi/3$
18	$2\cos(\pi t/3) + 1$	$-2\sin(\pi t/3) - 4$	1
19	$2\cos(2t) + 1$	$\sin(2t) - 3$	$\pi/6$
20	$-2\sin(\pi t/3)$	$4\cos(\pi t/3) + 1$	1
21	$2\sin(2t) - 3$	$3\cos(2t) - 2$	$\pi/3$
22	$-4\cos(\pi t/3)$	$-2\sin(\pi t/3) - 3$	1
23	$4\cos(2t) - 1$	$3\sin(2t) - 3$	$\pi/6$
24	$-\cos(2t) - 2$	$\sin(2t) + 1$	$\pi/3$

Задание 1.3.

В данном варианте задания содержатся более сложные зависимости координат точки от времени, а также дополнительно требуется определить момент времени t_1 как решение алгебраического или трансцендентного уравнения согласно условию, заданному в третьем столбце таблицы.

При построении траектории необходимо выделить на графике функции $y = f(x)$ дугу, которая является траекторией точки. Для уточнения вида кривой целесообразно подсчитать несколько промежуточных значений функции. Для определения момента времени t_1 необходимо провести анализ соответствующих заданных функций по условию задания. Отметим, что момент времени t_1 определяется фактически при выполнении заданного условия во второй раз после начала движения.

№	$x = x(t)$, *см*	$y = y(t)$, *см*	t_1 – *момент времени, когда впервые после начала движения выполняется условие*
1	$1 + 2sin(\pi t/2)$	$2 + 3cos(\pi t/2)$	$y = y_{min}$
2	$2sin(\pi t/3)$	$4cos^2(\pi t/3)$	Траектория пересекает ось *Oy*
3	$2t$	$2cos^2(4t)$	$y = y_{max}$
4	$sin(t)/2$	$1 – sin^2(t) + 2sin(t)$	$x = x_{max}/2$
5	$3sin(2t) + 2$	$4cos(2t) - 1$	$x = x_{min}$
6	$4cos(6t)$	$1 + 2sin(3t)$	Траектория пересекает ось *Oy*
7	$4t^2$	$3sin^2(\pi t)$	$y = y_{max}$
8	$4sin(\pi t/2)$	$1 – sin^2(\pi t/2)$	Траектория пересекает ось *Oy*
9	t	$(exp(t) + exp(-t))/2 - 8$	$y(t_1) = 1$
10	$2sin^2(\pi t/2)$	$t^2/9$	$x = x_{min}$
11	$1 – sin(\pi t/4)$	$2 + cos(\pi t/4)$	$x = x_{max}$
12	$5cos(2t) - 3$	$8sin(2t) + 4$	Траектория пересекает ось *Ox*
13	$(exp(t-1) + exp(-t+1)))/2$	$4t$	$x = x_{min}$
14	$8cos^2(\pi t/2)$	$2sin(\pi t/2) - 1$	$x = x_{max}$
15	$exp(-(2t - 1))$	$2t - 1$	Траектория пересекает ось *Ox*

№	$x = x(t)$, *см*	$y = y(t)$, *см*	t_1 – *момент времени, когда впервые после начала движения выполняется условие*
16	$2sin(\pi t/2)$	$2cos(\pi t)$	$y = y_{max}$
17	$t^2/4$	$2ln(t+ 1) – t^2/2$	$v_y = 0$
18	$2sin^2(\pi t/2)$	$t^2 - 1$	$v_x = 0$
19	$(exp(t/2) + exp(-t/2))/2$	$(exp(t/2) - exp(-t/2))/2$	Расстояние точки до начала координат равно 1 см
20	$sin(\pi t/3)$	$2(sin(\pi t/3) – 1/4)^3$	$v_x = v_{x\ max}$
21	$cos(\pi t/2)$	$3 + 2sin(\pi t/2)$	$x = x_{max}$
22	$t^2 - t$	$exp(-2(t^2 – t))$	Траектория пересекает ось *Oy*
23	$1 + exp(- t^2/2)$	$2exp(- t^2/2)$	$v_x = v_{x\ min}$
24	$cos(2\pi t)$	$(cos(2\pi t) – 1/3)^2$	$y = y_{min}$
25	$2sin(2t)\times (sin(2t) – 2)$	$sin(2t)$	Траектория пересекает ось *Oy*
26	$2sin(\pi t/2) - 3$	$4cos(\pi t/2) + 4$	$v_y = 0$
27	$t^2/3 + 2$	$ln(t^2 + 1) - 3$	Траектория пересекает ось *Ox*
28	$t^2/2 - 4$	$exp(- t^2)$	Траектория пересекает ось *Oy*
29	$- 3cos(\pi t) + 5$	$3sin(\pi t)$	Расстояние точки от начала координат – минимальное
30	$2t^2 - 1$	$3cos(\pi t)$	$a_y = a_{y\ min}$

ГЛАВА 2. КИНЕМАТИКА ТВЕРДОГО ТЕЛА

В данной главе рассматриваются способы задания движения твердого тела и методы определения кинематических характеристик движения как всего тела в целом, так и отдельных его точек.

Различные виды движения твердого тела классифицируются следующим образом:

- *поступательное движение;*
- *вращательное движение* (вращение тела вокруг неподвижной оси);
- *плоское (плоскопараллельное) движение;*
- *сферическое движение* (вращение тела вокруг неподвижной точки);
- *общий случай движения твердого тела.*

Далее рассматриваются первые три вида движения.

2.1 Поступательное движение твердого тела

Поступательным движением твердого тела называется такое движение, при котором любая прямая, жестко скрепленная с телом, остается во все время движения параллельной своему первоначальному положению (на рис. 4 прямая $AB \parallel A_1B_1$). Траектории всех точек тела при этом движении представляют собой одинаковые кривые, которые могут быть совмещены друг с другом путем параллельного переноса (на рис. 4 показаны траектории точек A и B). Траекториями точек могут быть кривые любой формы.

При поступательном движении векторы скорости и ускорения всех точек тела в каждый момент времени одинаковы (на рис. 4 $\bar{v}_A = \bar{v}_B$ и $\bar{a}_A = \bar{a}_B$). Одинаковую для всех точек тела скорость $\bar{v}$ называют *скоростью поступательного движения* тела, а одинаковое ускорение $\bar{a}$ - *ускорением поступательного движения.* Эти понятия скорости и ускорения тела имеют смысл *только при поступательном движении*, а при других видах движения теряют свой смысл, поскольку скорости и ускорения различных точек тела будут разными.

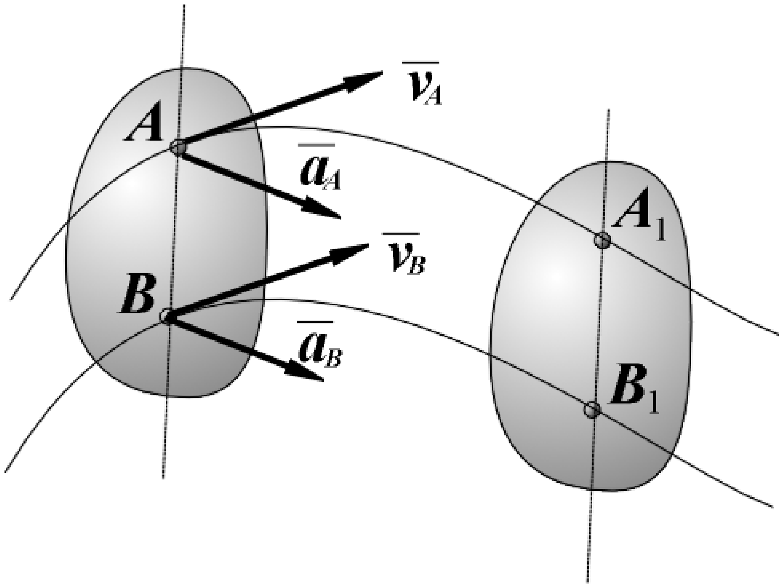


Рис 4. Поступательное движение твердого тела.

Таким образом, поступательное движение твердого тела полностью определяется движением любой его точки. Для задания этого движения достаточно знать координаты какой-либо точки тела (например, точки A) как функции времени:

$$x_A = x_A(t); \quad y_A = y_A(t); \quad z_A = z_A(t). \tag{2.1}$$

Уравнения вида (2.1) являются *уравнениями поступательного движения твердого тела*. Для изучения поступательного движения тела достаточно использовать методы кинематики точки.

Движение твердого тела, для которого векторы скоростей всех точек равны только в один момент времени, а не все время, называется *мгновенным поступательным движением* (см. с. 34). При мгновенном поступательном движении ускорения точек в общем случае не являются одинаковыми.

2.2 Вращательное движение твердого тела

Вращательным движением тела (вращением тела вокруг неподвижной оси) называется такое движение, при котором две точки тела остаются неподвижными в течение всего времени движения (точки A и B на рис.5). При этом также остаются неподвижными все точки тела, расположенные на прямой, проходящей через эти точки. Эта прямая называется *осью вращения тела* (ось Oz). Точки, не лежащие на оси вращения, описывают окружности, плоскости которых перпендикулярны оси вращения и центры которых лежат на этой оси.

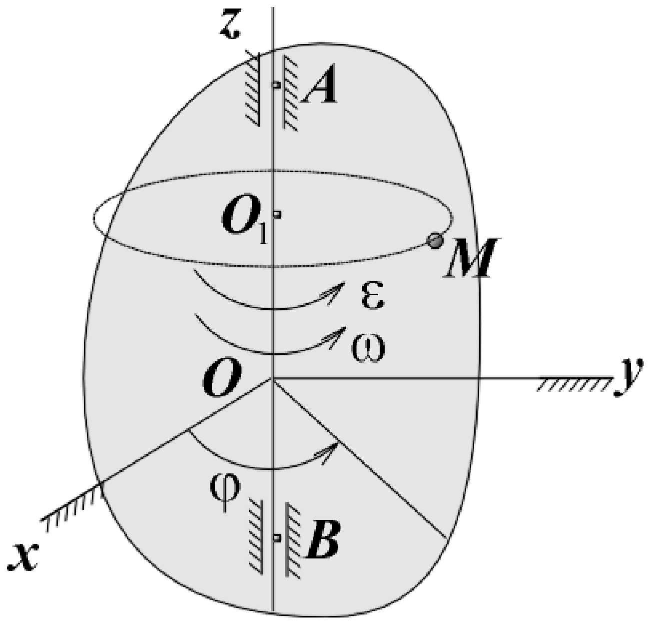


Рис 5. Вращательное движение твердого тела.

Положение вращающегося тела в любой момент времени однозначно определяется взятым с соответствующим знаком углом φ, называемым *углом поворота тела.* Положительным направлением отсчета угла φ принимается направление *против хода часовой стрелки*, видимое с положительного конца оси Oz (как показано на рис. 5). Зависимость угла φ от времени

$$\varphi = \varphi(t) \tag{2.2}$$

выражает *закон вращательного движения твердого тела вокруг неподвижной оси.* Угол φ измеряется в *радианах*.

Основными кинематическими характеристиками вращательного движения тела являются его угловая скорость и угловое ускорение.

Угловой скоростью ω тела в данный момент времени называется первая производная по времени от угла поворота:

$$\omega = \dot{\varphi} \quad (рад/с). \tag{2.3}$$

Она является величиной положительной при вращении тела против часовой стрелки (см. рис. 5), когда угол поворота тела возрастает с течением времени, и отрицательной – при вращении тела по часовой стрелки.

В технике угловую скорость называют также *частотой вращения* и часто выражают в других единицах измерения, например, *в оборотах в минуту.* Связь между этими величинами выражается формулой:

$$\omega\,(рад/с) = \frac{2\pi}{60}\, n\;(об/мин) \quad \text{или} \quad \omega = \frac{\pi n}{30}. \tag{2.4}$$

Угловым ускорением ε тела в данный момент времени называется первая производная по времени от угловой скорости ω или вторая производная от угла поворота φ :

$$\varepsilon = \dot{\omega} = \ddot{\varphi} \quad (рад/с^2). \tag{2.5}$$

Угловую скорость и угловое ускорение тела на рисунках изображают дуговыми стрелками вокруг оси вращения (рис.5).

Угловую скорость и угловое ускорение тела можно рассматривать как векторные величины. Если $\bar{k}$ - орт оси вращения Oz, то *вектор угловой скорости* $\overline{\omega}$ и *вектор углового ускорения* $\overline{\varepsilon}$ определяются выражениями

$$\overline{\omega} = \omega \overline{k}; \qquad \overline{\varepsilon} = \varepsilon \overline{k}. \tag{2.6}$$

Эти векторы направлены вдоль оси вращения и могут быть приложены к любым точкам этой оси, то есть они являются *скользящими векторами.*

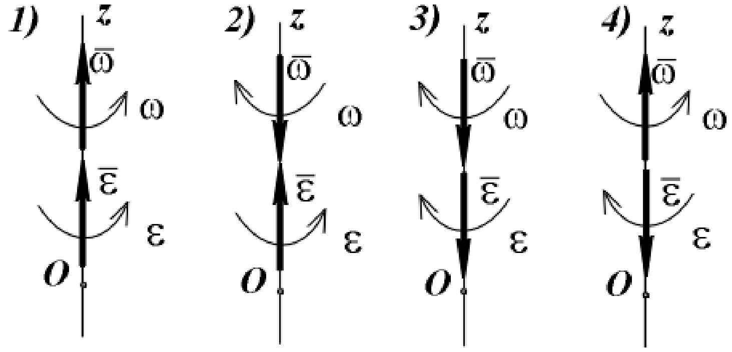


Рис.6. Векторы угловой скорости и углового ускорения вращающегося тела и их взаимное расположение.

При $\omega = \dot{\varphi} > 0$ и $\varepsilon = \ddot{\varphi} > 0$ оба вектора направлены в положительную сторону оси вращения Oz (рис.6; случай 1). В отличие от векторов $\overline{\omega}$ и $\overline{\varepsilon}$ скалярные величины ω и ε, определяемые формулами (2.3) и (2.4), называют *алгебраической угловой скоростью* и *алгебраическим угловым ускорением.*

Если известно угловое ускорение тела $\varepsilon = \varepsilon(t), t \geq 0$ и начальные значения угловой скорости ω_0 и угла поворота φ_0 (обычно принимают $\varphi_0 = 0$) в момент времени $t = 0$, то угловая скорость и угол поворота в последующие моменты времени $t > 0$ определяются по формулам

$$\omega(t) = \omega_0 + \int_o^t \varepsilon(t)\, dt; \quad \varphi(t) = \varphi_0 + \int_0^t \omega(t)\, dt. \tag{2.7}$$

В частном случае *равнопеременного вращения* при $\varepsilon = \varepsilon_0 = const$ формулы (2.6) принимают вид

$$\omega = \omega_0 + \varepsilon_0 t; \quad \varphi = \varphi_0 + \omega_0 t + \varepsilon_0 t^2 / 2. \tag{2.8}$$

Если величины ω и ε_0 имеют одинаковые знаки (произведение $\omega \varepsilon_0 > 0$), вращение будет *равноускоренным* (рис 6; случаи 1 и 3), а если разные ($\omega \varepsilon_0 < 0$) – *равнозамедленным* (рис 6; случаи 2 и 4). При $\varepsilon_0 = 0$ угловая скорость тела остается постоянной во все время движения тела ($\omega = \omega_0 = const$) и такое вращение называется *равномерным.*

Рассмотрим движение какой-либо точки *M* вращающегося тела (рис.5), находящейся на расстоянии *R* от оси вращения. Расстояние *s* точки *M,* отсчитываемое от точки M_0 (при $\varphi = 0$) по дуге окружности (рис.7), выражается через угол поворота φ (рад.) зависимостью

$$s = R\varphi. \tag{2.9}$$

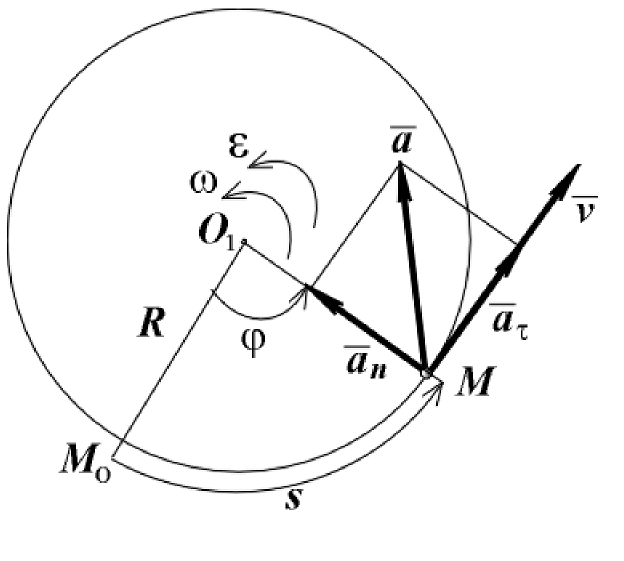


Рис 5. Векторы скорости и ускорения точки вращающегося тела.

Числовое значение скорости согласно формуле (1.10) будет равно

$$v_\tau = \dot{s} = R\dot{\varphi} \qquad \text{или} \qquad v = R\omega. \qquad (2.10)$$

Таким образом, модуль скорости точки вращающегося тела равен произведению модуля угловой скорости тела на расстояние от этой точки до оси вращения. Вектор скорости направлен по касательной к описываемой точкой окружности в сторону дуговой стрелки ω (рис. 7).

Ускорение точки определяется по касательной и нормальной составляющим согласно формулам (1.11):

$$a_\tau = \dot{v}_\tau = R\dot{\omega} = R\varepsilon; \quad a_n = \frac{v_\tau^2}{\rho} = R\omega^2 \quad (\rho = R). \qquad (2.11)$$

Касательная составляющая ускорения a_τ (*вращательное ускорение*) направлена по касательной к траектории в сторону дуговой стрелки ε, а нормальная составляющая a_n (*центростремительное ускорение*) всегда направлена по радиусу MO_1 к оси вращения (рис. 7).

Модуль полного ускорения точки

$$a = \sqrt{a_\tau^2 + a_n^2} = R\sqrt{\varepsilon^2 + \omega^4}. \qquad (2.12)$$

Векторы скорости $\overline{v}$ и ускорения $\overline{a}$ могут быть определены по следующим векторным формулам:

$$\overline{v} = \overline{\omega} \times \overline{r}; \quad \overline{a} = \overline{a}_\tau + \overline{a}_n = \overline{\varepsilon} \times \overline{r} + \overline{\omega} \times \overline{v}; \qquad (2.13)$$

где $\overline{r}$ - радиус-вектор, проведенный из точки O в точку M.

Формулы (2.9)-(2.12) позволяют определять скорость и ускорение любой точки тела, если известен закон вращения тела (2.2) и расстояние данной точки от оси вращения. По этим же формулам можно, зная движение одной точки вращающегося тела, найти характеристики движения всего тела в целом (угловую скорость ω и угловое ускорение ε).

2.3 Плоское движение твердого тела

Плоским движением называется такое движение твердого тела, при котором все его точки перемещаются в неподвижных параллельных между собой плоскостях. Частным случаем плоского движения является вращение твердого тела вокруг неподвижной оси. Для изучения плоского движения тела достаточно изучить движение плоской фигуры в плоскости, которую можно считать сечением тела данной плоскостью.

2.3.1 Уравнения движения плоской фигуры в плоскости

Положение фигуры S в плоскости Oxy (рис. 8) можно задать координатами x_A, y_A какой-либо точки A и углом φ, на который повернулась фигура вокруг точки A относительно некоторого начального ее положения (в этом положении принимается $\varphi = 0$). Точку A, используемую для определения положения фигуры, называют *полюсом.*

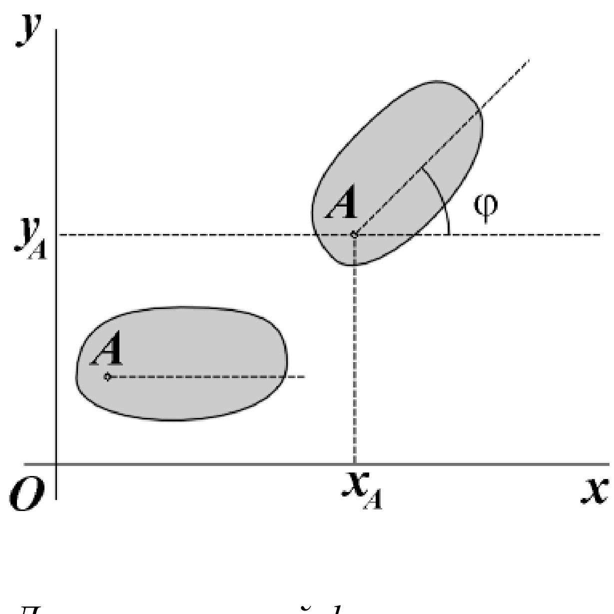


Рис 8. Движение плоской фигуры в плоскости.

Для задания положения движущейся фигуры надо задать зависимости координат x_A, y_A и угла φ от времени *t*:

$$x_A = x_A(t); \quad y_A = y_A(t); \quad \varphi = \varphi(t). \tag{2.14}$$

Уравнения (2.14) называются *уравнениями движения плоской фигуры* в плоскости.

Первые два из уравнений (2.14) определяют движение, которое совершала бы фигура при $\varphi = const$. При этом все точки фигуры будут двигаться так же как полюс *A*, то есть такое движение будет поступательным. Третье из уравнений (2.14) определяет движение, которое совершала бы фигура при неподвижном полюсе *A* ($x_A = const$; $y_A = const$), то есть вращение фигуры вокруг полюса *A*.

Следовательно, *произвольное плоское движение плоской фигуры складывается из поступательного и вращательного движений.*

Кинематическими характеристиками поступательного движения являются скорость и ускорение полюса *A*: $\bar{v}_A = \dot{\bar{r}}_A$; $\bar{a}_A = \dot{\bar{v}}_A = \ddot{\bar{r}}_A$; а вращательного движения – угловая скорость и угловое ускорение фигуры: $\omega = \dot{\varphi}$; $\varepsilon = \dot{\omega} = \ddot{\varphi}$. Характеристики поступательного движения зависят от выбора полюса, а вращательного движения – не зависят.

Далее рассмотрим определение скоростей и ускорений отдельных точек плоской фигуры.

2.3.2 Определение скоростей точек плоской фигуры с использованием полюса

Поскольку движение плоской фигуры складывается из поступательного движения, при котором все точки фигуры движутся со скоростью $\bar{v}_A$ полюса *A*, и из вращательного движения вокруг этого полюса, то скорость любой точки *B* складывается векторно из скоростей, которые имеются у точки *B* в каждом из этих движений (рис. 9):

$$\bar{v}_B = \bar{v}_A + \bar{v}_{BA}, \quad (\bar{v}_{BA} \perp AB). \tag{2.15}$$

Здесь $\overline{v}_A$ - скорость полюса A; $\overline{v}_{BA}$ - скорость точки B при вращении фигуры вокруг полюса A (если считать его неподвижным), равная по модулю $v_{BA} = \omega \cdot AB$ и направленная перпендикулярно к AB в сторону дуговой стрелки угловой скорости ω.

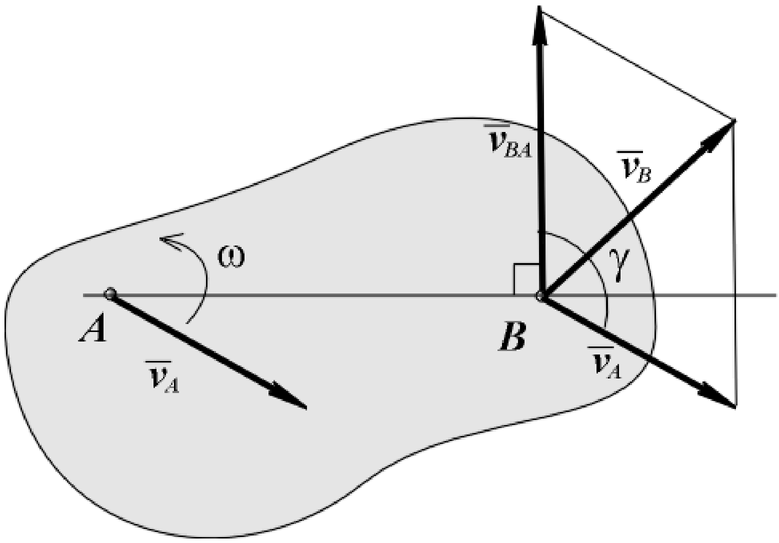


Рис 9. Определение скорости точки B
с использованием полюса A .

Модуль скорости точки B может быть найден с использованием теоремы косинусов по формуле

$$v_B = \sqrt{v_A^2 + v_{BA}^2 + 2v_A v_{BA} \cos\gamma}\ , \qquad (2.16)$$

где $\gamma \in [0, \pi]$ - угол между векторами $\overline{v}_A$ и $\overline{v}_{BA}$.

Если спроецировать векторное равенство (2.15) на ось Au, проведенную через точки A и B (рис. 9), то с учетом условия перпендикулярности $\overline{v}_{BA} \perp AB$, получаем *свойство проекций скоростей* точек плоской фигуры: проекции скоростей двух точек плоской фигуры на ось, проходящую через эти точки, равны.

Это свойство проекций скоростей выражается следующим соотношением между модулями скоростей точек *A* и *B* (рис. 10):

$$v_u = v_A \cos\alpha = v_B \cos\beta . \qquad (2.17)$$

При помощи равенства (2.17) могут решаться многие задачи определения скоростей точек плоской фигуры.

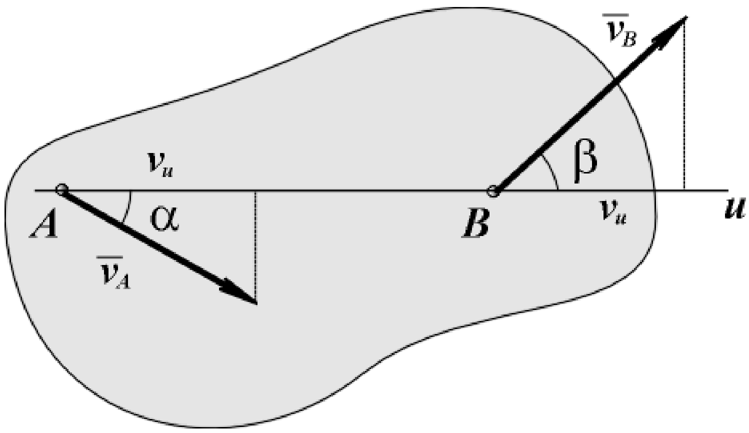


Рис 10. Свойство равенства проекций скоростей точек A и B.

Отметим, что равенство проекций скоростей $\bar{v}_A$ и $\bar{v}_B$ является следствием неизменности расстояния между точками *A* и *B*, принадлежащими твердому телу. Поэтому указанное свойство проекций скоростей будет выполняться при любом движении твердого тела.

2.3.3 Определение скоростей точек плоской фигуры с использованием мгновенного центра скоростей

Мгновенным центром скоростей (МЦС) плоской фигуры называется точка *P*, скорость которой в данный момент времени равна нулю: $\bar{v}_P = 0$. МЦС может быть конкретной точкой плоской фигуры или может располагаться вне плоской фигуры. В последнем случае его следует понимать как точку *подвижной плоскости*, жестко скрепленной с плоской фигурой. При движении плоской фигуры положение МЦС может изменяться как относительно самой фигуры, так и относительно неподвижной системы отсчета.

Использование МЦС упрощает процедуру определения скоростей точек плоской фигуры. Пусть в данный момент времени известно положение МЦС (точка P) и известна угловая скорость ω плоской фигуры (рис. 11).

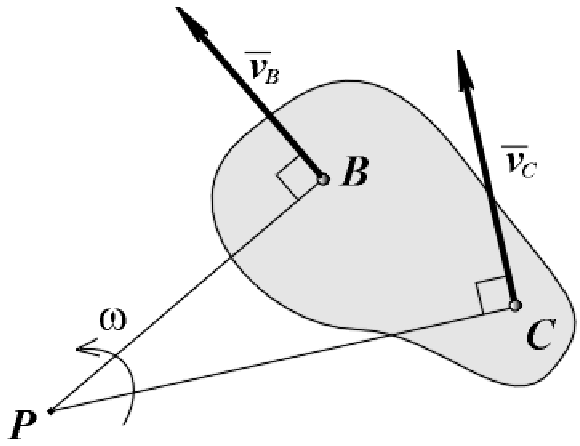


Рис 11. Определение скоростей точек B и C с использованием мгновенного центра скоростей P.

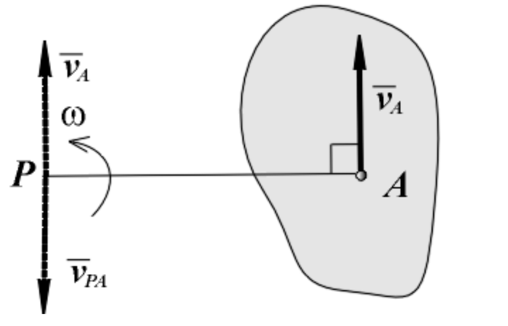
Возьмем точку P для этого момента времени в качестве полюса, скорость которого $\bar{v}_P = 0$. Тогда согласно формуле (2.15) скорость какой-либо точки B $\bar{v}_B = \bar{v}_P + \bar{v}_{BP} = \bar{v}_{BP}$. Направление скорости $\bar{v}_B$ перпендикулярно отрезку PB и ее модуль $v_B = v_{BA} = \omega \cdot PB$. Аналогичный результат получается для другой точки C:

$$\bar{v}_C = \bar{v}_{CP};\ \ v_C = v_{CA} = \omega \cdot PC;\ (\bar{v}_C \perp PC).$$

Таким образом, *скорости точек плоской фигуры пропорциональны их расстояниям до МЦС и определяются в данный момент времени так, как если бы движение фигуры было вращением вокруг МЦС.*

Методы нахождения положения МЦС

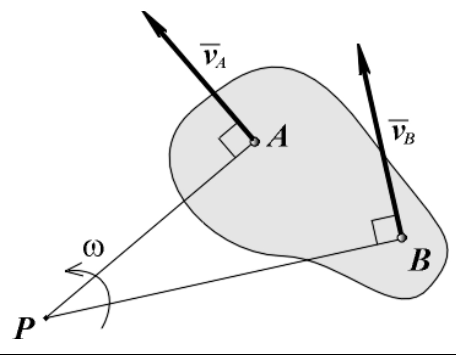
1). Известен вектор скорости $\overline{v}_A$ какой-либо точки A плоской фигуры и ее угловая скорость $\omega \neq 0$.



МЦС (точка *P*) находится на перпендикуляре к вектору $\overline{v}_A$, проведенном через точку *A*. Расстояние $AP = v_A/\omega$ и откладывается в сторону, которую указывает вектор $\overline{v}_A$ после поворота на угол π/2 в направлении дуговой стрелки *ω*. При этом получается, что скорость

$\overline{v}_P = \overline{v}_A + \overline{v}_{PA} = \overline{v}_A - \overline{v}_A = 0;$ $(v_{PA} = \omega \cdot PA = v_A)$.

2). Известны не параллельные друг другу скорости $\overline{v}_A$ и $\overline{v}_B$ двух точек плоской фигуры.



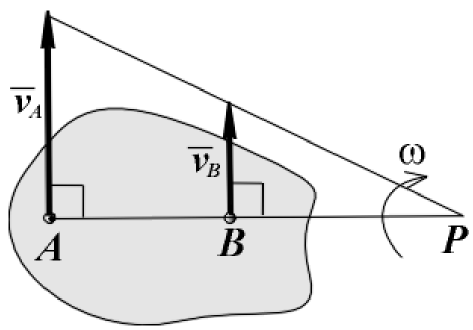
МЦС (точка *P*) находится в точке пересечения перпендикуляров, проведенных через точки *A* и *B* к скоростям этих точек. Угловая скорость плоской фигуры

$\omega = v_A / PA = v_B / PB$.

Отметим, что для нахождения только положения МЦС достаточно знать лишь *направления* скоростей двух точек.

Методы нахождения положения МЦС

3). Известны параллельные друг другу скорости $\bar{v}_A$ и $\bar{v}_B$ точек A и B плоской фигуры, перпендикулярные отрезку AB, направленные в одну сторону и не равные по модулю ($v_A \neq v_B$).

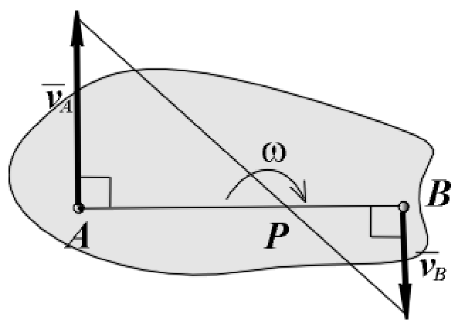


МЦС (точка *P*) находится в точке пересечения продолжения отрезка *AB* и прямой, проведенной через концы векторов $\bar{v}_A$ и $\bar{v}_B$. При заданной длине отрезка *AB* расстояния от МЦС до точек *A* и *B* определяются из пропорции: $v_A : v_B = PA : PB$. Угловая скорость фигуры

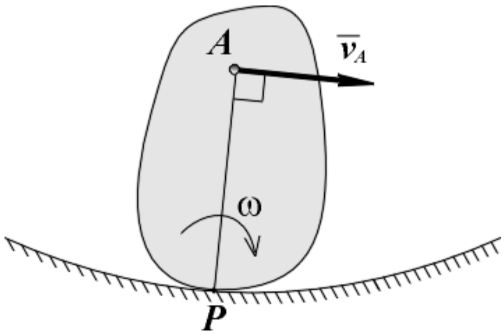
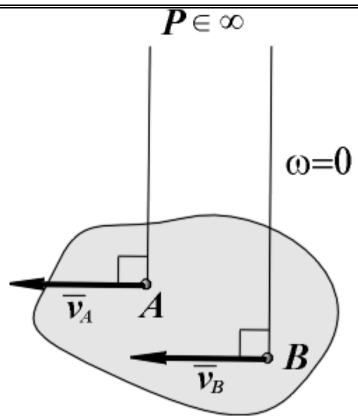
$\omega = v_A / PA = v_B / PB$.

Случай равенства $v_A = v_B$ см. п. 6 на с. 34.

4). Известны параллельные друг другу скорости $\bar{v}_A$ и $\bar{v}_B$ точек A и B плоской фигуры, перпендикулярные отрезку AB, направленные в разные стороны.



МЦС (точка *P*) находится в точке пересечения отрезка *AB* и прямой, проведенной через концы векторов $\bar{v}_A$ и $\bar{v}_B$. При заданной длине отрезка *AB* расстояния от МЦС до точек *A* и *B* определяются из пропорции: $v_A : v_B = PA : PB$. Угловая скорость фигуры $\omega = v_A / PA = v_B / PB$.

<table>
<tr><td colspan="2">Методы нахождения положения МЦС</td></tr>
<tr><td>5). Плоская фигура катится без скольжения по неподвижной кривой.</td><td>
</td></tr>
<tr><td colspan="2">МЦС (точка P) находится в точке соприкосновения фигуры с кривой, так как скорости точек фигуры и неподвижной кривой, находящиеся в соприкосновении, равны между собой и, следовательно, равны нулю. Если известна скорость какой-либо точки A фигуры, то угловая скорость $\omega = v_A / PA$.</td></tr>
<tr><td>6). Известно, что скорости $\overline{v}_A$ и $\overline{v}_B$ двух точек плоской фигуры параллельны друг другу и не перпендикулярны отрезку AB.</td><td>
</td></tr>
<tr><td colspan="2">МЦС в данный момент времени не существует или, другими словами, находится в бесконечности. Угловая скорость плоской фигуры в данный момент равна нулю. Движение фигуры называется мгновенно-поступательным. Скорости всех точек фигуры равны ($\overline{v}_A = \overline{v}_B$).
Аналогичный результат получается в случае равенства $v_A = v_B$ (см. п. 4 на с. 33).</td></tr>
</table>

2.3.4 Определение ускорений точек плоской фигуры

Рассматривая плоское движение плоской фигуры как сумму поступательного движения, при котором все точки фигуры движутся с ускорением $\overline{a}_A$ полюса *A*, и вращательного движения вокруг этого полюса, получаем формулу для определения ускорения какой-либо точки *B* плоской фигуры в виде

$$\overline{a}_B = \overline{a}_A + \overline{a}_{BA} = \overline{a}_A + \overline{a}_{BA}^{в} + \overline{a}_{BA}^{ц}. \tag{2.18}$$

Здесь $\overline{a}_A = \dot{\overline{v}}_A = \ddot{\overline{r}}_A$ - ускорение полюса *A*; $\overline{a}_{BA}$ - ускорение вращательного движения точки *B* вокруг полюса *A*, которое как в случае вращения тела вокруг неподвижной оси векторно складывается из *вращательного ускорения* $\overline{a}_{BA}^{в}$ и *центро-стремительного ускорения* $\overline{a}_{BA}^{ц}$. Модули этих ускорений определяются по формулам

$$a_{BA}^{в} = \varepsilon \cdot AB; \quad a_{BA}^{ц} = \omega^2 \cdot AB, \tag{2.19}$$

где $\omega = |\dot{\varphi}|$ - модуль угловой скорости плоской фигуры; $\varepsilon = |\ddot{\varphi}|$ - модуль углового ускорения. Вращательное ускорение $\overline{a}_{BA}^{в}$ направлено перпендикулярно отрезку *AB* в сторону дуговой стрелки ε, а центростремительное ускорение $\overline{a}_{BA}^{ц}$ направлено по линии *AB* от точки *B* к полюсу *A* (рис. 12). Модуль полного ускорения $\overline{a}_{BA}$ точки *B* относительно полюса *A* в силу условия $\overline{a}_{BA}^{в} \perp \overline{a}_{BA}^{ц}$ вычисляется по формуле

$$a_{BA} = \sqrt{(a_{BA}^{в})^2 + (a_{BA}^{ц})^2} = AB\sqrt{\varepsilon^2 + \omega^4}. \tag{2.20}$$

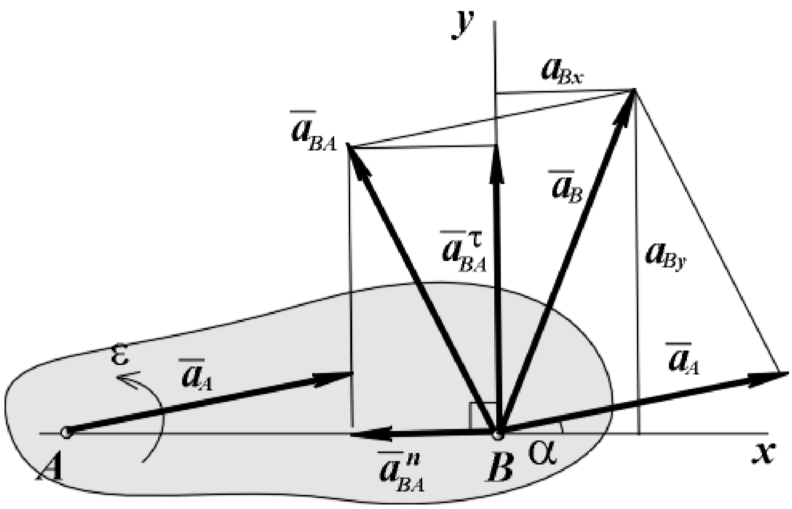


Рис 12. Определение ускорения точки В с использованием полюса А.

Для нахождения ускорения $\overline{a}_B$ по формуле (2.18) рекомендуется использовать *аналитический способ*. В этом способе вводится прямоугольная декартова система координат (система *Bxy* на рис. 12) и вычисляются проекции a_{Bx}, a_{By} искомого ускорения как алгебраические суммы проекций ускорений, входящих в правую часть равенства (2.18):

$$\begin{aligned} a_{Bx} &= (\overline{a}_A)_x + (\overline{a}^{в}_{BA})_x + (\overline{a}^{ц}_{BA})_x = a_A\cos\alpha - a^{ц}_{BA}; \\ a_{By} &= (\overline{a}_A)_y + (\overline{a}^{в}_{BA})_y + (\overline{a}^{ц}_{BA})_y = a_A\sin\alpha + a^{в}_{BA}, \end{aligned} \tag{2.21}$$

где α - угол между вектором $\overline{a}_A$ и осью *Bx*. По найденным проекциям можно изобразить на рисунке вектор $\overline{a}_B$ и найти его модуль

$$a_B = \sqrt{a^2_{Bx} + a^2_{By}}\ . \tag{2.22}$$

Изложенный способ определения ускорений точек плоской фигуры применим для решения задач, в которых задано движение полюса *A* и угол поворота фигуры уравнениями (2.14). Если зависимость угла поворота от времени неизвестна, то для заданного положения фигуры приходится определять *мгновенную* угловую скорость и *мгновенное* угловое ускорение. Способы их определения рассматриваются далее в примерах выполнения задания 2.

Отметим также, что при определении ускорений точек плоской фигуры может использоваться *мгновенный центр ускорений* – точка, ускорение которой в данный момент времени равно нулю. Однако применение мгновенного центра ускорений связано с довольно трудоемкими методами нахождения его положения, поэтому определение ускорений точек плоской фигуры рекомендуется выполнять по формуле (2.18).

2.4 Задание 2. Определение скоростей и ускорений точек плоского механизма

Механизмы (см. с. 5) называются *плоскими*, если все его точки движутся в одной или в параллельных друг другу плоскостях, иначе механизмы называются *пространственными*.

В задании 2.1 рассматриваются *планетарные механизмы*, в задании 2.2 – *кривошипно-позунные механизмы*, а в задании 2.3 помимо названных двух типов изучается движение механизмов других типов. Большинство рассматриваемых механизмов являются *механизмами с одной степенью свободы*, в которых для определения движения всех звеньев нужно задать закон движения одного звена.

Задание 2.1

В планетарном механизме (рис. 13) кривошип 1 длиной OA = 0.8 (*м*) вращается вокруг неподвижной оси O, перпендикулярной плоскости рисунка, по закону $\varphi_{OA}(t) = 6t - 2t^2$ (рад). В точке A кривошип шарнирно соединен с центром диска 2 радиуса r = 0.5 (м), находящегося во внутреннем зацеплении с неподвижным колесом 3, соосным с кривошипом OA. На диске 2 в момент времени t_1 = 1 (с) задана точка B, положение которой определяется расстоянием AB = 0.5 (м) и углом α = 135°. (В заданный момент времени угол α отсчитывается от оси Ax в направлении против хода часовой стрелки при $\alpha > 0$ или в противоположном направлении при $\alpha < 0$).

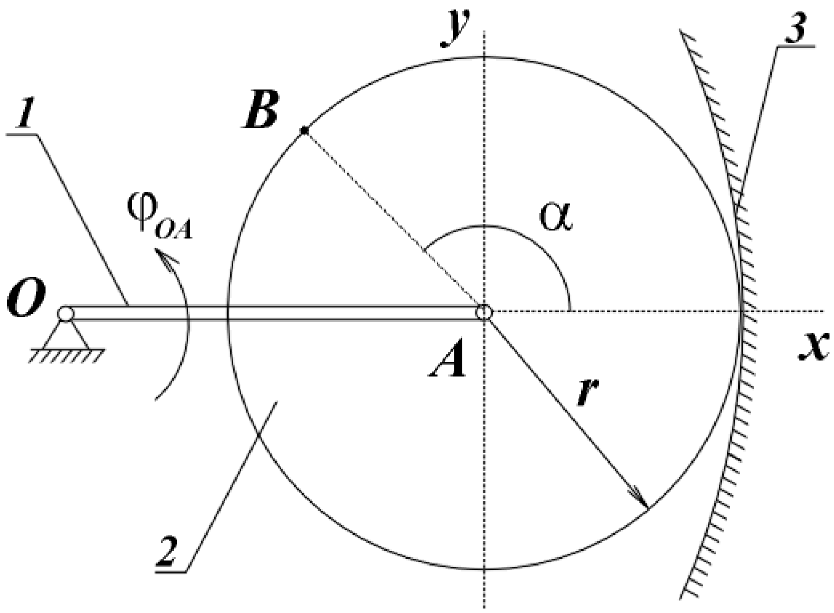


Рис 13. Планетарный механизм и способ задания положения точки B.

Определить в момент времени t_1

1) скорость точки B двумя способами: с использованием мгновенного центра скоростей (МЦС) диска 2 и с использованием полюса A;
2) ускорение точки B с использованием полюса A.

Решение.

1) Определение скорости точки *B*.

Вначале требуется выполнить графическое изображение механизма в выбранном масштабе (например, в 1 *см* рисунка – 0.1 *м* отрезка OA и радиуса r) и показать заданное положение точки B (рис. 14).

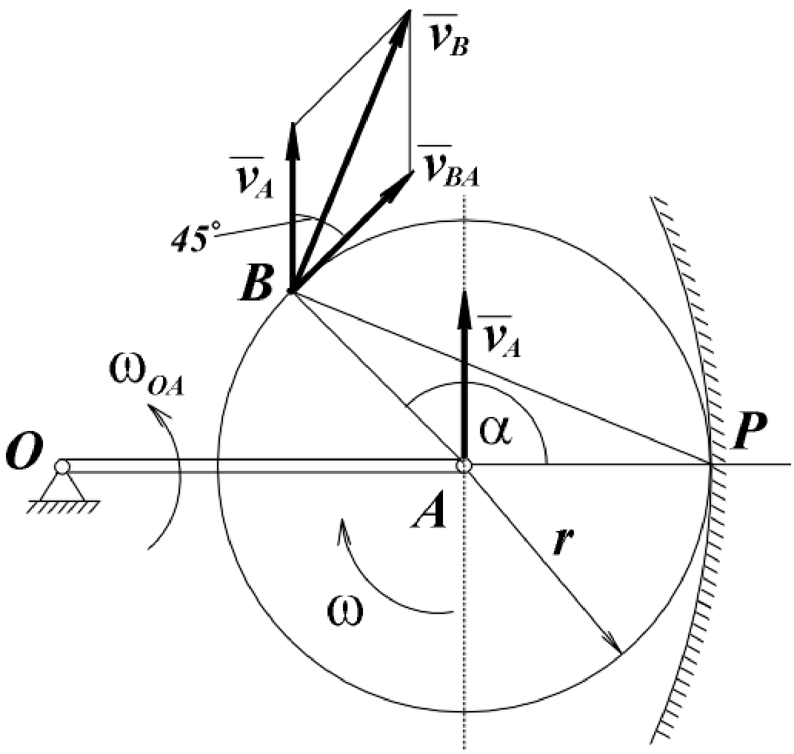


Рис 14. Определение скорости точки B с использованием мгновенного центра скоростей P и полюса A.

По заданному закону вращения кривошипа *OA* найдем скорость центра *A* диска 2. Определяем угловую скорость кривошипа в заданный момент времени $t_1 = 1$ (*с*):

$$\omega_{OA} = \dot{\varphi}_{OA} = (6t - 2t^2)^{\dot{}} = 6 - 4t; \quad \omega_{OA}(t_1) = 2\ (рад/с).$$

Полученная величина $\omega_{OA}(t_1)$ является положительной, поэтому дуговую стрелку ω_{OA} направляем против хода часовой стрелки, то есть в положительном направлении отсчета.

Вычисляем модуль скорости

$$v_A = \omega_{OA}(t_1) \cdot OA = 2 \cdot 0.8 = 1.6\ (м/с)$$

и строим вектор скорости $\overline{v}_A$ перпендикулярно *OA* в сторону дуговой стрелки ω_{OA}.

В случае, когда $\omega_{OA}(t_1)$ получается отрицательной, дуговая стрелка ω_{OA} и вектор $\overline{v}_A$ изображаются в противоположных направлениях, а для расчета v_A используется модуль $|\omega_{OA}(t_1)|$.

Мгновенный центр скоростей (точка P) диска 2 расположен в точке его соприкостновения с колесом 3 (см. п. 5 на с. 34). Определим мгновенную угловую скорость ω диска по найденной величине скорости v_A:

$$\omega = v_A / AP = v_A / r = 1.6 / 0.5 = 3.2 \ (рад / с)$$

и изображаем на рисунке ее дуговую стрелку (рис. 14).

Для определения скорости точки B с использованием МЦС находим расстояние BP по теореме косинусов из треугольника ABP:

$$BP = \sqrt{AB^2 + AP^2 - 2\,AB\,AP\cos 135^\circ} =$$
$$= \sqrt{0.5^2 + 0.5^2 - 2 \cdot 0.5^2\,(-\sqrt{2}/2)} \approx 0.924\,(м).$$

Скорость $\overline{v}_B$ равна по модулю

$$v_B = \omega \cdot PB = 3.2 \cdot 0.924 \approx 2.956\,(м / с)$$

и направлена перпендикулярно отрезку PB в сторону дуговой стрелки ω.

Тот же вектор $\overline{v}_B$ может быть найден с использованием полюса A по формуле (2.15): $\overline{v}_B = \overline{v}_A + \overline{v}_{BA}$. Перенесем вектор $\overline{v}_A$ в точку B и построим вектор $\overline{v}_{BA}$, перпендикулярный отрезку AB и направленный в сторону дуговой стрелки ω. Модуль $v_{BA} = \omega \cdot AB =\ 3.2 \cdot 0.5 = 1.6\,(м / с)$. Здесь получилось равенство $v_{BA} = v_A$ поскольку расстояние $AB = r$. По рисунку определяем, что угол между векторами $\overline{v}_A$ и $\overline{v}_{BA}$ равен 45°. Тогда по формуле (2.16) находим

$$v_B = \sqrt{{v_A}^2 + {v_{BA}}^2 + 2\,v_A\,v_{BA}\cos 45^\circ} =$$
$$= \sqrt{1.6^2 + 1.6^2 + 2\cdot 1.6^2\,(\sqrt{2}/2)} \approx 2.956\ (м/с).$$

На рисунке вектор $\overline{v}_B$ должен совпадать с диагональю параллелограмма, сторонами которого являются векторы $\overline{v}_A$ и $\overline{v}_{BA}$. Это достигается построением векторов $\overline{v}_A$, $\overline{v}_B$ и $\overline{v}_{BA}$ в выбранном масштабе (например, 1 *см* на рисунке соответствует 0.5 *м/с*). Отметим, что приведенные в рассмотренном примере масштабы можно изменять и назначать самостоятельно.

2). Определение ускорения точки *B*.

Ускорение точки *B* определим по формуле (2.18) с использованием полюса *A*, ускорение которого складывается векторно из касательного и нормального ускорений:

$$\overline{a}_B = \overline{a}_A + \overline{a}^{в}_{BA} + \overline{a}^{ц}_{BA} = \overline{a}^{\tau}_A + \overline{a}^{n}_A + \overline{a}^{в}_{BA} + \overline{a}^{ц}_{BA}.$$

По заданному закону вращения кривошипа *OA* найдем его угловое ускорение:

$$\varepsilon_{OA} = \dot{\omega}_{OA} = (6 - 4t)^{\boldsymbol{\cdot}} = -4\ (рад/c^2).$$

Полученная величина ε_{OA} является отрицательной, поэтому дуговую стрелку ε_{OA} направляем по ходу часовой стрелки, то есть в отрицательном направлении, а в дальнейшем расчете будем брать эту величину по модулю.

Модули касательного и нормального ускорений полюса *A* в заданный момент времени t_1 находим по формулам (2.11):

$$a^{\tau}_A = |\varepsilon_{OA}|\cdot OA = 4\cdot 0.8 = 3.2\ \ (м/c^2);$$
$$a^{n}_A = \omega^2_{OA}\cdot OA = 2^2\cdot 0.8 = 3.2\ (м/c^2).$$

Касательное ускорение $\bar{a}_A^{\tau}$ направлено перпендикулярно кривошипу OA в сторону дуговой стрелки ε_{OA}, а нормальное ускорение $\bar{a}_A^{n}$ - от тоски A к точке O при любом направлении угловой скорости кривошипа (рис. 15). Полное ускорение $\bar{a}_A$ определять не требуется.

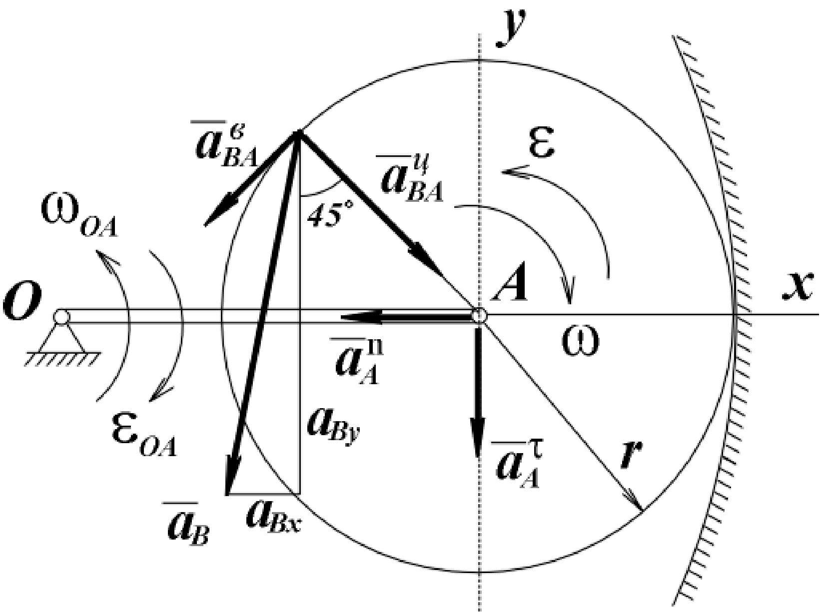


Рис 15. Определение ускорения точки B с использованием полюса A.

Далее требуется найти угловое ускорение ε диска 2. Для этого запишем выражение для его угловой скорости, которое выполняется в каждый момент времени:

$$\omega = v_A / r = \omega_{OA} \cdot (OA / r).$$

Тогда по определению угловое ускорение диска (при $OA/r = const$) равно

$$\varepsilon = \dot{\omega} = \dot{\omega}_{OA} \cdot (OA / r) = \varepsilon_{OA} \cdot (OA / r) = -4 \cdot (0.8 / 0.5) = -6.4\ (рад / с^2).$$

Поскольку в момент времени t_1 ω и ε имеют разные знаки, то угловую стрелку ε направляем в противоположном направлении к дуговой стрелки ω.

Вычислим модули вращательного и центростремительного ускорений точки B относительно полюса A по формулам (2.19):

$$a_{BA}^{в} = |\varepsilon| \cdot AB = 6.4 \cdot 0.5 = 3.2 \ \ (м/с^2);$$

$$a_{BA}^{ц} = \omega^2 \cdot AB = 3.2^2 \cdot 0.5 = 5.12 \ \ (м/с^2).$$

Вектор $\overline{a}_{BA}^{в}$ направлен перпендикулярно отрезку AB в сторону дуговой стрелки ε, а вектор $\overline{a}_{BA}^{ц}$ - от точки B к полюсу A (рис. 15).

Ускорение точки B найдем по его проекциям на оси координатной системы Axy:

$$\begin{aligned}
a_{Bx} &= (\overline{a}_A^{\tau})_x + (\overline{a}_A^{n})_x + (\overline{a}_{BA}^{в})_x + (\overline{a}_{BA}^{ц})_x = \\
&= 0 - a_A^{n} - a_{BA}^{в} \cos 45^\circ + a_{BA}^{ц} \cos 45^\circ = \\
&= -3.2 - 3.2 \cdot \sqrt{2}/2 + 5.12 \cdot \sqrt{2}/2 \approx -1.84 \, (м/с^2);
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
a_{By} &= (\overline{a}_A^{\tau})_y + (\overline{a}_A^{n})_y + (\overline{a}_{BA}^{в})_y + (\overline{a}_{BA}^{ц})_y = \\
&= -a_A^{\tau} + 0 - a_{BA}^{в} \cos 45^\circ - a_{BA}^{ц} \cos 45^\circ = \\
&= -3.2 - 3.2 \cdot \sqrt{2}/2 - 5.12 \cdot \sqrt{2}/2 \approx -9.08 \, (м/с^2).
\end{aligned}$$

Модуль $a_B = \sqrt{a_{Bx}^2 + a_{By}^2} \approx 9.27 \, (м/с^2)$.

На рисунке ускорения $\overline{a}_A^{\tau}$, $\overline{a}_A^{n}$, $\overline{a}_{BA}^{в}$, $\overline{a}_{BA}^{ц}$ требуется изобразить в выбранном масштабе и построить в этом же масштабе вектор $\overline{a}_B$ по найденным проекциям (рис. 15).

Исходные данные для самостоятельного выполнения задания 2.1 приведены в таблице на с. 44.

№	$\varphi_{OA}(t)$, *рад*	*OA, м*	*r, м*	*AB, м*	α, *град*	t_1, с
1	$t^2 + 3t$	0.8	0.6	0.5	120	1
2	$8t – 3t^2$	0.8	0.5	0.3	-60	1
3	$t^2 - 4t$	0.8	0.6	0.3	90	1
4	$3t – 2t^2$	0.9	0.6	0.5	-30	1
5	$2t^2 - t$	0.9	0.5	0.4	45	1
6	$4t – t^2$	0.9	0.4	0.3	-135	1
7	$2t^2 - 6t$	1	0.6	0.4	-120	0.5
8	$2t – 3t^2$	1	0.7	0.5	150	1
9	$3t^2 - 4t$	1	0.8	0.6	135	1
10	$8t – 2t^2$	1	0.8	0.5	-45	1
11	$4t^2 - 6t$	1	0.6	0.3	-120	0.5
12	$3t – 4t^2$	1	0.7	0.4	60	1
13	$4t^2 - 2t$	1.2	0.9	0.6	-150	0.5
14	$6t – t^2$	1.2	0.9	0.8	-135	1
15	$2t^2 - 4t$	1.2	0.8	0.5	45	0.5
16	$4t – 3t^2$	1.2	0.8	0.6	-30	1
17	$2t^2 + t$	1.2	0.7	0.6	120	0.5
18	$4t – 2t^2$	1.2	0.6	0.4	-150	0.5
19	$3t^2 - 10t$	1.4	1	0.8	60	1
20	$t – 2t^2$	1.4	0.9	0.7	135	1
21	$3t^2 + 2t$	1.4	0.9	0.6	-45	0.5
22	$6t – 3t^2$	1.4	0.8	0.5	30	0.5
23	$3t^2 - 8t$	1.4	0.8	0.6	-90	0.5
24	$2t – 4t^2$	1.4	0.7	0.5	150	1

Задание 2.2

Кривошипно-ползунный механизм (рис. 16), состоящий из *кривошипа OA, шатуна AB* и *ползуна B*, совершает движение в плоскости рисунка. Прямая B_1B_2, по которой движется ползун B, не проходит через ось вращения O кривошипа и в этом случае кривошипно-ползунный механизм называют *нецентральным*.

Кривошип OA вращается *равномерно* с угловой скоростью $\omega_{OA} = const$ (при $\omega_{OA} > 0$ вращение происходит против хода часовой стрелки; при $\omega_{OA} < 0$ - по ходу часовой стрелки). На шатуне задана точка C с известным расстоянием AC. В некоторый момент времени положение механизма определяется углом поворота φ кривошипа OA и углом α, который образуют между собой кривошип и шатун.

Пусть вышеперечисленные параметры имеют следующие числовые значения: ω_{OA} = 10 (*рад/с*); OA = 0.4 (*м*); AB = 1.2 (*м*); AC = 0.6 (*м*); φ = 30°; α = 120°.

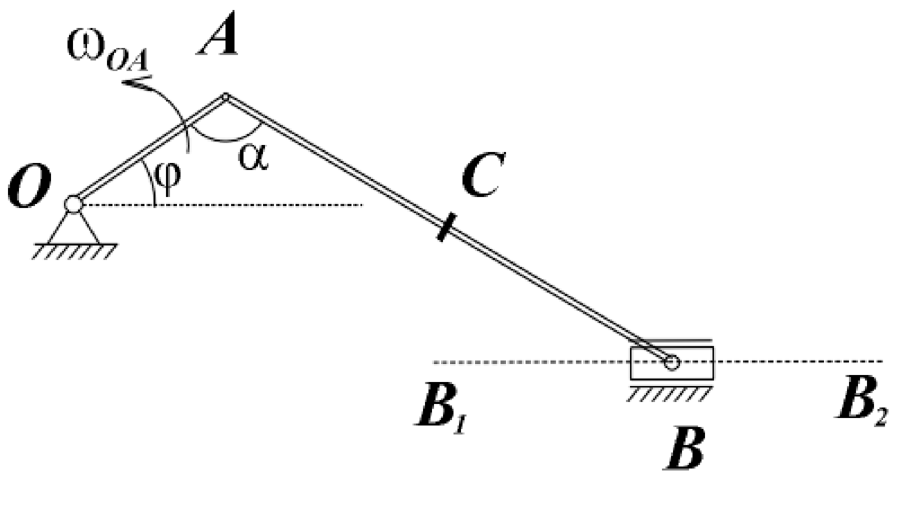


Рис 16. Параметры заданного положения и движения Кривошипно-ползунного механизма.

В заданном положении механизма определить

1) скорости точек *B* и *C* с использованием мгновенного центра скоростей (МЦС) шатуна *AB*, а также скорость точки *B* с использованием полюса *A*;
2) ускорения точек *B* и *C*.

Решение.

Определение скоростей точек *B* и *C*.

Изобразим заданное положение механизма (рис. 17) с конкретными углами $\varphi = 30°$, $\alpha = 120°$ и в выбранном масштабе по длине (например, в 1 *см* рисунка – 0.2 *м* длины *OA* и *AB*).

По заданной угловой скорости кривошипа *OA* найдем модуль скорости точки *A*

$$v_A = \omega_{OA} \cdot OA = 10 \cdot 0.4 = 4 \ (м/с).$$

Вектор $\bar{v}_A$ направлен перпендикулярно кривошипу *OA* в сторону дуговой стрелки ω_{OA}.

Положение МЦС (точка *P*) шатуна найдем по известной скорости $\bar{v}_A$ и известному направлению скорости ползуна *B* (см. п. 2 на с. 32). Для этого проводим через точки *A* и *B* перпендикуляры к направлениям скоростей этих двух точек до их пересечения в точке *P*. По рисунку видно, что треугольник *APB* является равносторонним и, следовательно, $AP = BP = AB = 1.2$ (*м*). В других случаях стороны *AP* и *BP* этого треугольника можно найти по теореме синусов, по теореме косинусов или по теореме Пифагора.

Угловую скорость ω (можно также использовать обозначение ω_{AB}) шатуна *AB* определяем через известную скорость точки *A* по формуле

$$\omega = v_A / AP = 4 / 1.2 \approx 3.33 \ (рад / с)$$

и изображаем дуговой стрелкой вокруг МЦС в направлении, согласованном с направлением вектора $\bar{v}_A$.

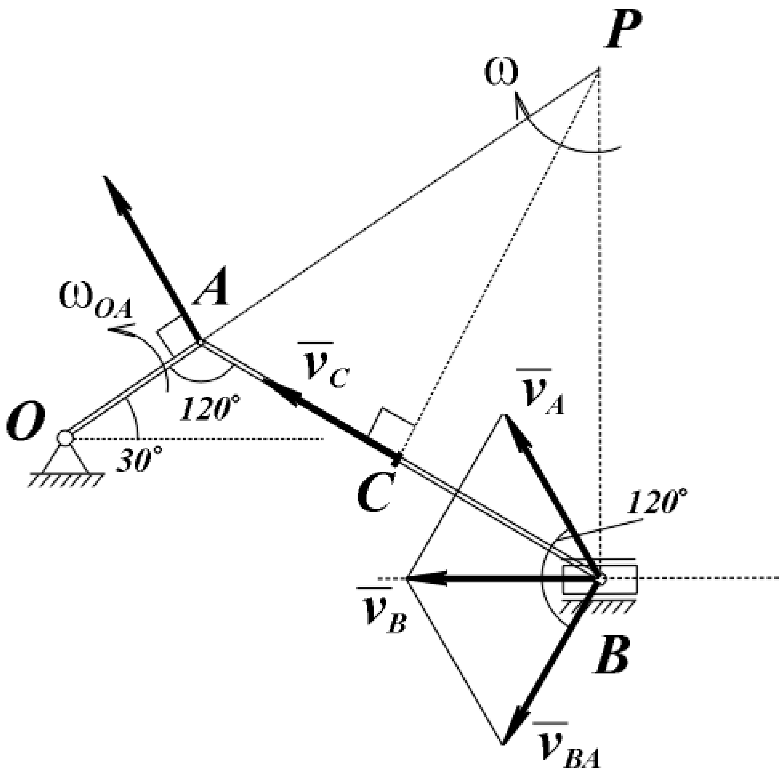


Рис 17. Определение скоростей точек B и C.

Скорость $\overline{v}_B$ ползуна *B* равна по модулю

$$v_B = \omega \cdot BP = 3.33 \cdot 1.2 = 4 \ (м/с)$$

и направлена вдоль направляющих ползуна в сторону дуговой стрелки ω. В данном случае получилось равенство $v_A = v_B$ вследствие равенства расстояний *AP* = *BP*. Отметим также, что полученные скорости $\overline{v}_A$ и $\overline{v}_B$ *должны* удовлетворять свойству равенства проекций скоростей (см. с. 30).

Для определения скорости точки *C* проведем отрезок *PC* (в данном примере *PC* является высотой треугольника *APB*) и найдем его длину

$$PC = \sqrt{AP^2 - AC^2} = \sqrt{1.2^2 - 0.6^2} \approx 1.04 \ (м).$$

Скорость $\overline{v}_C$ равна по модулю

$$v_C = \omega \cdot PC = 3.33 \cdot 1.04 \approx 3.46 \ (м/с)$$

и направлена перпендикулярно отрезку *PC* в сторону дуговой стрелки ω. Скорость $\overline{v}_C$ получилась направленной вдоль шатуна *AB*. Легко видеть, что для других точек этого стержня, расположенных между точками *A* и *C*, их скорости будут отклонены вверх (как у точки *A*), а для точек, расположенных между точками *C* и *B*, - вниз (как у точки *B*).

Тот же вектор $\overline{v}_B$ может быть найден с использованием полюса *A* по формуле (2.15): $\overline{v}_B = \overline{v}_A + \overline{v}_{BA}$. Перенесем вектор $\overline{v}_A$ в точку *B* и построим вектор $\overline{v}_{BA}$, перпендикулярный отрезку *AB* и направленный в сторону дуговой стрелки ω. Модуль $v_{BA} = \omega \cdot AB =$ $3.33 \cdot 1.2 = 4 \ (м/с)$. Здесь получилось равенство $v_{BA} = v_A$ поскольку равны расстояния *AB* и *AP*. По рисунку определяем, что угол между векторами $\overline{v}_A$ и $\overline{v}_{BA}$ равен 120°. Тогда по формуле (2.16) находим

$$v_B = \sqrt{{v_A}^2 + {v_{BA}}^2 + 2 v_A v_{BA} \cos 120^\circ} =$$
$$= \sqrt{4^2 + 4^2 + 2 \cdot 4^2 (-0.5)} = 4 \ (м/с).$$

На рисунке вектор $\overline{v}_B$ должен совпадать с диагональю параллелограмма, сторонами которого являются векторы $\overline{v}_A$ и $\overline{v}_{BA}$. Это достигается построением векторов $\overline{v}_A$, $\overline{v}_B$ и $\overline{v}_{BA}$ в выбранном масштабе (например, 1 *см* на рисунке соответствует 1 *м/с*). Отметим, что приведенные в рассмотренном примере масштабы можно изменять и назначать самостоятельно.

2). Определение ускорения точки *B*.

Ускорение точки *B* с использованием полюса *A* определяется по формуле (2.18):

$$\overline{a}_B = \overline{a}_A + \overline{a}_{BA}^{в} + \overline{a}_{BA}^{ц} = \overline{a}_A^{\tau} + \overline{a}_A^{n} + \overline{a}_{BA}^{в} + \overline{a}_{BA}^{ц}.$$

Так как кривошип OA вращается равномерно (ω_{OA} = = $const$), то $\varepsilon_{OA} = \dot{\omega}_{OA} = 0$. Следовательно, касательное ускорение точки A $a_A^\tau = \varepsilon_{OA} \cdot OA = 0$ и ее полное ускорение $\overline{a}_A$ совпадает с нормальным ускорением $\overline{a}_A^n$, направлено от точки A к точки O (рис. 18) и равно по модулю

$$a_A = a_A^n = \omega_{OA}^2 \cdot OA = 10^2 \cdot 0.4 = 40\,(м/с^2).$$

В данной задаче зависимость угловой скорости ω шатуна от времени неизвестна, поэтому приходится определять его *мгновенное* угловое ускорение ε в заданном положении. Такие задачи могут быть решены, если известно направление ускорения какой-либо точки рассматриваемого тела. Такой точкой шатуна является точка B, направление движения которой известно. Зададимся каким-либо направлением углового ускорения ε (например, против хода часовой стрелки; см. рис. 18) и направлением ускорения $\overline{a}_B$ (например, справа налево; рис.18). Изобразим на рисунке также вращательное и центростремительное ускорения $\overline{a}_{BA}^в$, $\overline{a}_{BA}^ц$ точки B относительно полюса A.

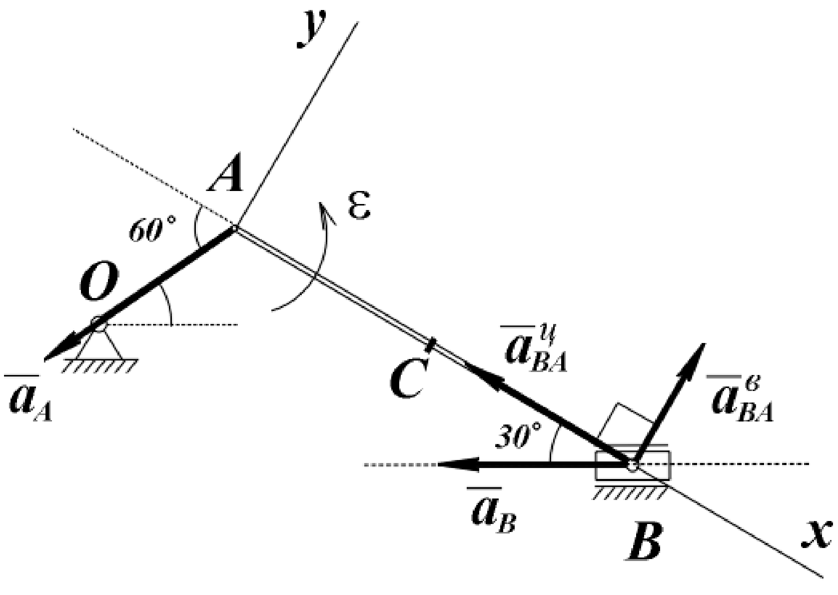


Рис. 18. Определение ускорения точки B.

Вращательное ускорение точки B относительно полюса A по модулю равно

$$a^{ц}_{BA} = \omega^2 \cdot AB = 3.33^2 \cdot 1.2 \approx 13.30\ (м/с^2).$$

Введем систему координат Axy и спроецируем векторное выражение для ускорения $\overline{a}_B$ на оси Ax и Ay:

$$\begin{cases} -a_B \cos 30^\circ = -a_A \cos 60^\circ - a^{ц}_{BA}\,; \\ -a_B \sin 30^\circ = -a_A \sin 60^\circ + a^{в}_{BA}\,. \end{cases}$$

Полученная система двух алгебраических уравнений содержит две скалярных неизвестных: a_B и $a^{в}_{BA} = \varepsilon \cdot AB$. Из первого уравнения находим

$$a_B = (a_A \cos 60^\circ + a^{ц}_{BA}) / \cos 30^\circ =$$
$$= (40 \cdot 0.5 + 13.30) \cdot 2/\sqrt{3} \approx 38.45\ (м/с^2).$$

Величина a_B оказалась положительной и в этом случае направление вектора $\overline{a}_B$ показано на рис. 18 верно. В другом случае, когда величина a_B является отрицательной, верным направление вектора $\overline{a}_B$ будет противоположное тому, которое изображено на рисунке. Во втором случае перерисовывать вектор $\overline{a}_B$ в верном направлении не требуется.

Далее из второго уравнения алгебраической системы определяем величину ускорения $a^{в}_{BA}$, а затем – угловое ускорение шатуна:

$$a^{в}_{BA} = a_A \sin 60^\circ - a_B \sin 30^\circ =$$
$$= 40 \cdot \sqrt{3}/2 - 38.45 \cdot 0.5 \approx 15.42\ (м/с^2);$$
$$\varepsilon = a^{в}_{BA} / AB = 15.42/1.2 \approx 12.85\ (рад/с^2).$$

Величина углового ускорения ε оказалась положительной и в этом случае направление дуговой стрелки ε показано на рис. 18 верно. В другом случае, когда величина ε является отрицательной, верным направлением дуговой стрелки будет противоположное тому, которое изображено на рисунке. Во втором случае рекомендуется перерисовать дуговую стрелку в верном направлении, а первую стрелку изобразить пунктирной линией.

При известных значениях угловой скорости ω и углового ускорения ε шатуна ускорение точки C легко определить с использованием полюса A по формуле (2.18):

$$\overline{a}_C = \overline{a}_A + \overline{a}_{CA}^{в} + \overline{a}_{CA}^{ц}.$$

При этом следует воспользоваться верным направлением углового ускорения ε и способом, изложенным на с. 36.

Исходные данные для самостоятельного выполнения задания 2.2 приведены в таблице на с. 52.

Задание 2.3

В качестве этого задания предлагается выполнить задание К.3. «Кинематический анализ плоского механизма» из сборника [7].

№	ω_{OA}, рад/с	OA, м	AB, м	AC, м	φ, град	α, град
1	5	0.6	2	0.5	45	120
2	-12	0.5	1.8	0.3	60	90
3	8	0.5	2.1	0.4	30	60
4	-6	0.6	2	0.2	120	30
5	9	0.5	2.2	0.4	30	135
6	-10	0.4	2	0.2	150	45
7	12	0.4	1.6	0.3	30	90
8	-5	0.5	1.5	0.3	45	135
9	10	0.6	1.8	0.3	135	60
10	-9	0.5	2	0.4	120	45
11	8	0.6	2.2	0.2	60	90
12	-10	0.4	1.8	0.1	30	150
13	6	0.4	2	0.3	45	120
14	-12	0.4	1.2	0.2	60	135
15	5	0.5	1.6	0.4	120	60
16	-8	0.6	1.8	0.2	150	45
17	10	0.5	2	0.3	30	135
18	-6	0.6	1.6	0.3	45	135
19	9	0.5	1.8	0.3	60	120
20	-5	0.6	2.1	0.4	120	30
21	12	0.6	2	0.2	150	60
22	-10	0.4	2.2	0.3	45	120
23	8	0.6	2	0.4	30	150
24	-9	0.5	1.8	0.4	60	90

ГЛАВА 3. СЛОЖНОЕ ДВИЖЕНИЕ ТОЧКИ

Предположим, что движение точки M в пространстве рассматривается в двух движущихся относительно друг друга системах координат: $O_1x_1y_1z_1$ и $Oxyz$.

Одну из этих систем координат ($O_1x_1y_1z_1$) примем за основную и назовем *абсолютной системой координат*, а движение по отношению к ней и все кинематические параметры – *абсолютными*. Параметры абсолютного движения будем обозначать подстрочным индексом “a”. Например, $\overline{v}_a$ и $\overline{a}_a$ будут обозначать абсолютные скорость и ускорение.

Другую систему координат ($Oxyz$) назовем *относительной системой координат* и, соответственно, движение по отношению к этой системе, а также его кинематические параметры – *относительными.* Параметры относительного движения будем обозначать подстрочным индексом *“r”*. Например, $\overline{v}_r$ и $\overline{a}_r$ - относительные скорость и ускорение соответсвенно.

Введем понятие *переносного движения*, параметры которого будем обозначать подстрочным индексом *“e”* (например, $\overline{v}_e$ и $\overline{a}_e$). Переносным движением точки будем называть движение (по отношению к абсолютной системе) той точки относительной системы, в которой в рассматриваемый момент времени находится движущаяся точка M. Скорость, ускорение и другие кинематические параметры переносного движения будем называть переносной скоростью, переносным ускорением и т. д.

3.1 Теоремы о сложении скоростей и ускорений

Зависимости между относительными, переносными и абсолютными скоростями и ускорениями устанавливаются следующими теоремами.

Теорема о сложении скоростей: при сложном движении абсолютная скорость $\overline{v}_a$ равна векторной сумме относительной и переносной скоростей:

$$\bar{v}_a = \bar{v}_r + \bar{v}_e. \tag{3.1}$$

Здесь $\bar{v}_r$ - относительная скорость; $\bar{v}_e$ - переносная скорость точки *M*, то есть скорость той неизменно связанной с подвижной системой координат *Oxyz* точки, с которой совпадает в данный момент точка *M*. Если угол между векторами $\bar{v}_r$ и $\bar{v}_e$ равен α, то модуль абсолютной скорости равен

$$v_a = \sqrt{v_r^2 + v_e^2 + 2 v_r v_e \cos\alpha}. \tag{3.2}$$

Теорема о сложении ускорений (теорема Кориолиса): при сложном движении абсолютное ускорение $\bar{a}_a$ равно векторной сумме относительного, переносного и кориолисова ускорения:

$$\bar{a}_a = \bar{a}_r + \bar{a}_e + \bar{a}_c. \tag{3.3}$$

Здесь $\bar{a}_r$ - относительное ускорение; $\bar{a}_e$ - переносное ускорение; $\bar{a}_c$ - кориолисово ускорение (ускорение Кориолиса), равное удвоенному векторному произведению вектора угловой скорости $\bar{\omega}_e$ (вектора угловой скорости подвижной системы координат) на относительную скорость $\bar{v}_r$:

$$\bar{a}_c = 2\bar{\omega}_e \times \bar{v}_r. \tag{3.4}$$

Модуль кориолисова ускорения

$$a_c = 2\omega_e v_r \sin\beta, \tag{3.5}$$

где β - угол между векторами $\bar{\omega}_e$ и $\bar{v}_r$. Если переносное движение является поступательным ($\bar{\omega}_e = 0$), то $\bar{a}_c = 0$.

Если точка совершает плоское относительное движение, то ее относительное ускорение складывается из касательного и нормального ускорений:

$$\overline{a}_r = \overline{a}_r^{\tau} + \overline{a}_r^{n} . \qquad (3.6)$$

Если переносным движением является вращение вокруг неподвижной оси, то переносное ускорение складывается из вращательного и центростремительного ускорений:

$$\overline{a}_e = \overline{a}_e^{в} + \overline{a}_e^{ц} . \qquad (3.7)$$

3.2 Задание 3. Определение абсолютной скорости и абсолютного ускорения точки

По радиусу или ободу диска, вращающегося вокруг неподвижной оси (рис.19; схемы 1-4), движется точка *M*. Уравнение вращения диска $\varphi_e = \varphi_e(t)$, уравнение относительного движения $s_r = s_r(t)$, радиус диска *R* и угол α приведены в таблице на с. 63. Определить абсолютную скорость и абсолютное ускорение точки *M* в момент времени t_1, который определяется условием, заданным в столбце 5 таблицы.

Пример выполнения задания 3.

Диск вращается вокруг горизонтальной неподвижной оси (рис.19; схема1) согласно уравнению $\varphi_e = 2\pi\cos^2(t/2)/3$ (*рад*). По радиусу диска с углом наклона α = 30° движется точка *M* согласно уравнению $s_r(t) = 4\sin^2(10t)$ (*м*). Определить абсолютную скорость и абсолютное ускорение точки *M* в момент времени $t_1 > 0$, когда впервые после начала движения ($t = 0$) угловое ускорение $\varepsilon_e = -\pi/6$ (*рад/с*^{2}).

Решение.

Определим момент времени t_1 из заданного условия: $\varepsilon_e = \ddot{\varphi}_e = (2\pi\cos^2(t/2)/3)^{\cdot\cdot} = (-\pi\sin(t)/3)^{\cdot} = -\pi\cos(t)/3$; в момент времени t_1: $-\pi\cos(t_1) = -\pi/6$; $\cos(t_1) = 1/2$; $t_1 = \pi/3$ (с).

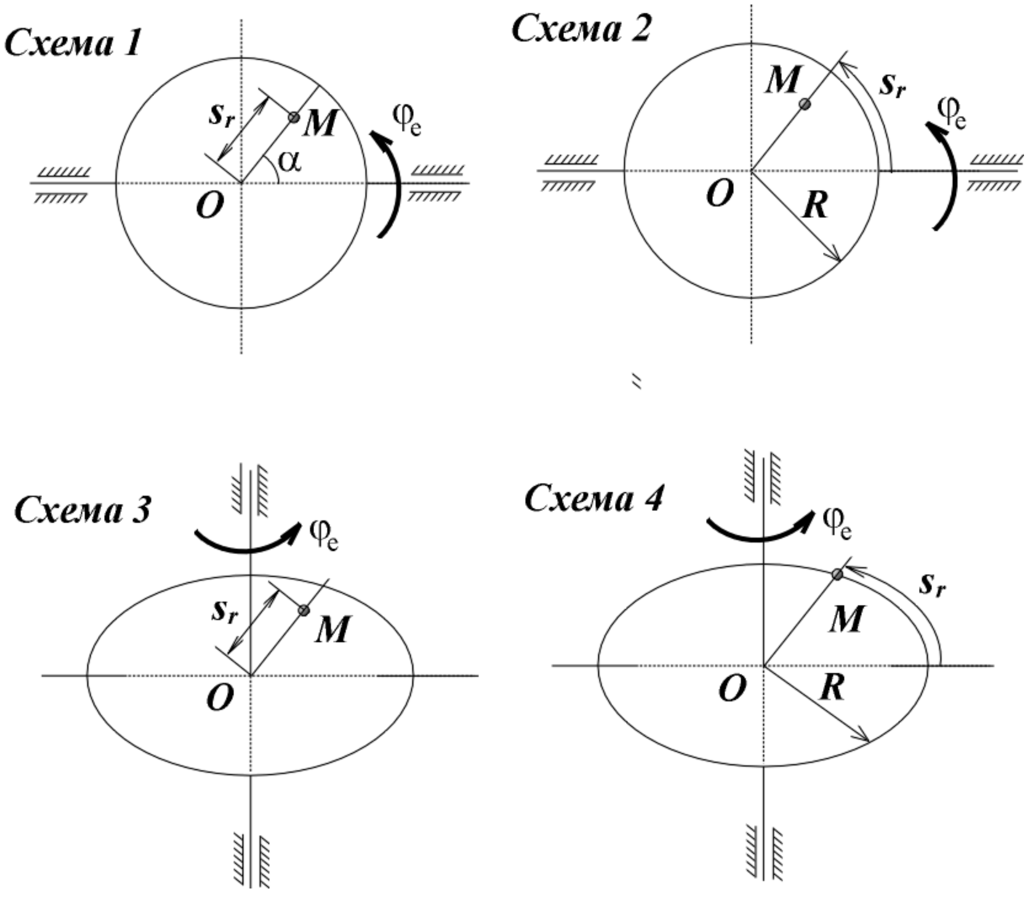


Рис. 19. Схемы задания относительного и переносного движений точки М.

Движение точки M рассматриваем как сложное движение: относительным движением точки является движение по радиусу диска, а переносным движением – вращательное движение диска вокруг неподвижной оси.

1). Определение абсолютной скорости точки *M*.

Абсолютную скорость точки M определим по формуле (3.1): $\bar{v}_a = \bar{v}_r + \bar{v}_e$ (рис. 20). Найдем величину относительной скорости в момент времени t_1:

$$v_r = \dot{s}_r = (4\sin^2(10t))^{\dot{}} = 40\sin(20t);$$

$$v_r(t_1) = 40\sin(20\pi/3) = 40\cdot\sqrt{3}/2 \approx 34.64 \ (\text{м/с}).$$

Модуль переносной скорости $v_e = |\omega_e| h$, где ω_e -угловая скорость диска; $h = s_r \sin\alpha$ - расстояние от точки M до оси вращения диска. Найдем эти параметры в момент времени t_1:

$$\omega_e = -\frac{\pi}{3}\sin(t); \qquad \omega_e(t_1) = -\frac{\pi}{3}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} \approx -0.91\,(\text{рад/с});$$

$$h(t_1) = 4\sin\ (10\pi/3)\cdot\sin 30^\circ = 4\cdot(-\sqrt{3}/2)^2\cdot 0.5 = 1.5\ (\text{м});$$

$$v_e(t_1) = |-0.91|\cdot 1.5 \approx 1.36\ (\text{м}/\text{с}).$$

Знак минус у числового значения угловой скорости диска указывает на то, что дуговую стрелку ω_e следует показать в противоположном направлении к направлению дуговой стрелки φ_e. Вектор переносной угловой скорости $\overline{\omega}_e$ направлен вправо (см. с. 24).

Введем систему координат *Mxyz*: ось *My* направим параллельно оси вращения диска; плоскость *Myz* совместим с плоскостью рисунка; ось *Mx* направлена перпендикулярно плоскости рисунка. Относительно этой системы координат изобразим векторы $\overline{v}_r$ и $\overline{v}_e$. Так как $v_r(t_1) > 0$, то вектор $\overline{v}_r$ направляем по радиусу в сторону положительного отсчета координаты s_r. Он расположен в плоскости *Myz*. Вектор $\overline{v}_e$ направлен по оси *Mx* в сторону дуговой стрелки ω_e. Векторы $\overline{v}_r$ и $\overline{v}_e$ взаимно перпендикулярны, поэтому модуль абсолютной скорости точки *M*

$$v_a(t_1) = \sqrt{v_r^2 + v_e^2} = \sqrt{34.64^2 + 1.36^2} \approx 34.67\ (\text{м}/\text{с}).$$

При другом угле между векторами $\overline{v}_r$ и $\overline{v}_e$ следует воспользоваться формулой (3.2).

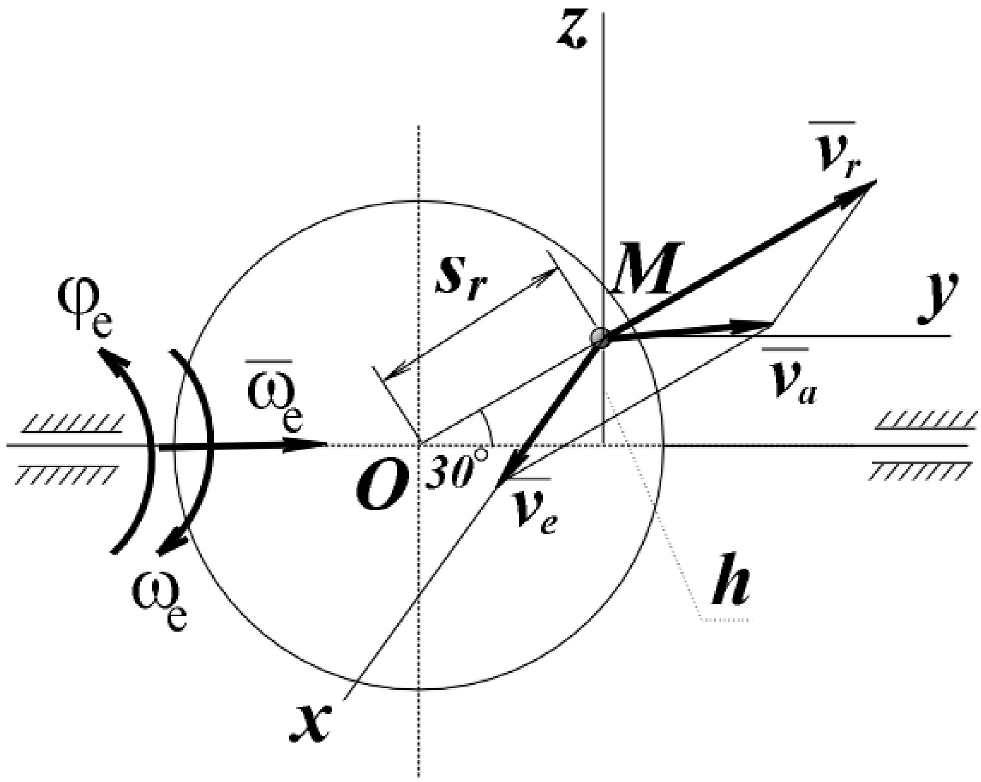


Рис. 20. Определение абсолютной скорости точки М.

2). Определение абсолютного ускорения точки *М*.

Абсолютное ускорение точки *М* определяем (рис. 21) по формуле (3.3), которая с учетом формул (3.6),(3.7) записывается в следующем виде:

$$\overline{a}_a = \overline{a}_r^{\tau} + \overline{a}_r^{n} + \overline{a}_e^{в} + \overline{a}_e^{ц} + \overline{a}_c . \qquad (3.8)$$

Определим по величине и по направлению ускорения в правой части равенства (3.8) в момент времени $t_1 = \pi / 3\,(c)$.

Относительное касательное ускорение:

$$a_r^{\tau} = \dot{v}_r = (40\sin(20t))^{\dot{}} = 800\cos(20t);$$

$$a_r^{\tau}(t_1) = 800\cos(20\pi / 3) = -400\ (м / c^2);$$

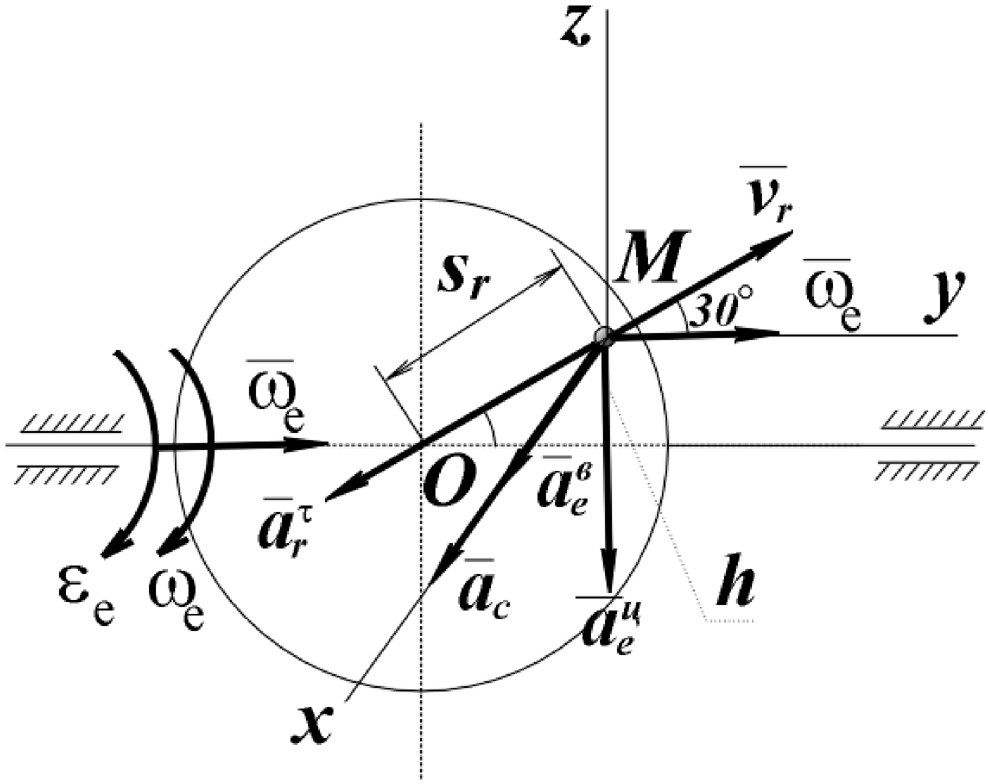


Рис. 21. Определение абсолютного ускорения точки M.

при отрицательном значении $a_r^{\tau}(t_1)$ вектор $\overline{a}_r^{\tau}$ направляем от точки M к точке O, то есть в отрицательном направлении отсчета координаты s_r.

Относительное нормальное ускорение $a_r^n = v_r^2 / \rho = 0$, так как относительное движение является прямолинейным ($\rho = \infty$).

Переносное вращательное ускорение:

$$a_e^{в}(t_1) = |\varepsilon_e| h = |-\pi/6| \cdot 1.5 \approx 0.78 \, (м/с^2);$$

вектор $\overline{a}_e^{в}$ направлен по оси Mx в сторону дуговой стрелки ε_e.

Переносное центростремительное ускорение:

$$a_e^{ц}(t_1) = \omega_e^2 \, h = (-0.91)^2 \cdot 1.5 \approx 1.24 \, (м/с^2);$$

вектор $\overline{a}_e^{ц}$ направлен от точки М к оси вращения диска, то есть в отрицательном направлении оси *Mz*.

Кориолисово ускорение:

$$a_c(t_1) = 2|\omega_e||v_r|\sin 30^\circ = 2\cdot 0.91\cdot 34.64\cdot 0.5 \approx 31.52\ (м/с^2);$$

вектор $\overline{a}_c$ направлен перпендикулярно плоскости, в которой лежат векторы $\overline{\omega}_e$ и $\overline{v}_r$, так, что с конца вектора $\overline{a}_c$ поворот вектора $\overline{\omega}_e$ к вектору $\overline{v}_r$ на кратчайший угол в 30° виден происходящим против хода часовой стрелки.

Проецируя векторное равенство (3.8) на оси *Mx, My, Mz* находим проекции, а затем и модуль ускорения точки *M* в момент времени t_1:

$$a_{ax}(t_1) = a_e^{в} + a_c = 0.78 + 31.52 = 32.30;$$

$$a_{ay}(t_1) = -a_r^{\tau}\cos 30^\circ = -400\cdot\sqrt{3}/2 \approx -346.41;$$

$$a_{az}(t_1) = -a_r^{\tau}\sin 30^\circ - a_e^{ц} = -400\cdot 0.5 - 1.24 = -201.24;$$

$$a_a(t_1) = \sqrt{a_{ax}^2 + a_{ay}^2 + a_{az}^2} = \sqrt{32.30^2 + 346.41^2 + 201.24^2} \approx 401.9\ (м/с^2).$$

Далее в таблице приведены исходные данные для самостоятельного выполнения задания 3, где

$s_r(t)$ - уравнение относительного движения точки *M*;

$\varphi_e(t)$ - уравнение вращения диска;

t_1 - момент времени, в который впервые после начала движения точки выполняется указанное условие;

α - угол наклона радиуса, по которому движется точка *M*;

R - радиус диска.

№	Схема	$\varphi_e(t)$, рад	$S_r(t)$, м	t_1, с	α, град	R, м
1	1	$25t - 2t^3/3$	$0.1(1 - \sin(\pi t/4))$	$v_r = 0.025\pi$ (м/с)	30	-
2	1	$t^3 - 2t^2$	$0.1(1 + \sin(\pi t/6))$	$s = s_{max}$	45	-
3	1	$20t + 40\cos(\pi t/2)/\pi$	$0.5t^2 - 0.15t^3$	$a_r = 0.1$ (м/с^2)	30	-
4	1	$5t^2/2 - 10t^3/3$	$0.06(1 - \sin(0.3\pi t))$	$\varepsilon_e = 0$	90	-
5	1	$4t^2 - t^3$	$0.5t - 0.1t^2$	$v_r = 0.3$ (м/с)	150	-
6	1	$5t^3/3 - 5t^2$	$0.1\cos^2(\pi t/4)$	$\omega_e = \omega_{e\,min}$	150	-
7	2	$5t^2 - 5t^3/3$	$0.125\pi t$	$a_c = 0$	-	0.3
8	2	$9t^2 - t^3$	$0.1\pi\cos^2(\pi t/3)$	$a^\tau_r = 0$	-	0.1
9	2	$t^2 - 2t^3$	$\pi(0.4t - 0.1t^2)/8$	$a^n_r = 0$	-	0.2
10	2	$t^3/3 - 2t^2$	$0.2\pi(1 - e^{-t})$	$\omega_e = \omega_{e\,min}$	-	0.4
11	2	$5t^2$	$0.2\pi\sin^2(t)$	$a^n_r = a^n_{r\,max}$	-	0.3
12	2	$10t^3/3$	$0.04t + 0.02t^3$	$\lvert a^\tau_r\rvert = 0.12$ (м/с^2)	-	0.2

№	Схема	$\varphi_e(t)$, рад	$S_r(t)$, м	t_1, с	α, град	R, м
13	3	$10t - 20\sin(\pi t/2)/\pi$	$0.05(1 - \cos(\pi t/2))$	$a^{ц}_e = a^{ц}_{e\,max}$	-	-
14	3	$20\sin(t)$	$0.1e^{-2t}$	$a_r = 0.2$ (м/с^2)	-	-
15	3	$-3\cos(\pi t/2-3)/\pi - t^3/3$	$0.01t+0.06t^2 - 0.01t^3$	$v_r = v_{r\,max}$	-	-
16	3	$-10e^{-t}$	$0.1(2 - \cos(\pi t))$	$v_r = 0.05\pi\sqrt{2}$ (м/с)	-	-
17	3	$t^4/2 - t^3$	$0.05\sin^2(\pi t/2)$	$\varepsilon_e = \varepsilon_{e\,min}$	-	-
18	3	$t^3 - 5t^2/2$	$0.1\sin^2(\pi t/2)$	$a_r = 0$	-	-
19	4	$4t^2 - t^3$	$0.2\,t - 0.05t^2$	$a^n_r = 0$	-	0.3
20	4	$4t^4 - 4t^3/3$	$0.3(\pi t - \cos(\pi t))$	$v_r = v_{r\,max}$	-	0.4
21	4	$10(t + e^{-t})$	$0.3\pi(\sin\pi t - \cos^2\pi t)$	$a_c = 0$	-	0.2
22	4	$2t^2 - t^3$	$0.4t^2 - 0.1t^3$	$\lvert a^{\tau}_r \rvert = 0.2$ (м/с^2)	-	0.3
23	4	$10t - t^3$	$0.6t + 0.15t^2$	$\lvert \varepsilon_e \rvert = 6$ (рад/с^2)	-	0.2
24	4	$6t - 2t^2$	$0.4t - 0.1t^2$	$a^n_r = a^n_{r\,min}$		0.1

ЛИТЕРАТУРА

1. Бать М.И., Джанелидзе Г.Ю., Кельзон А.С. Теоретическая механика в примерах и задачах. Т. 1. – М.: Высш. школа, 2001. – 484 с.

2. Бутенин Н.В., Лунц Я.Л., Меркин Д.Р. Курс теоретической механики. – М.: Высш. школа, 2002. – 736 с.

3. Никитин Н.Н. Курс теоретической механки. – М.: Высш. школа, 1990. – 607 с.

4. Тарг С.М. Краткий курс теоретической механики. – М.: Высш. школа, 1995. – 416 с.

5. Яблонский А.А., Никифорова В.М. Курс теоретической механики. – М.: Высш. школа, 2001. – 768 с.

6. Мещерский И.В. Задачи по теоретической механики. – М.: Наука, 2001. – 448 с.

7. Сборник заданий для курсовых работ по теоретической механике. Под ред. Яблонского А.А. – М.: Высш. школа, 1999. – 367 с.

8. Сборник коротких задач по теоретической механике. Под ред. Кепе О.Э. – М.: Высш. школа, 1989. – 368 с.

9. Экзаменационные задачи по теоретической механике. Под ред. Мельникова Г.И. – Л.: ЛИТМО, 1992. – 52 с.

Юрий Александрович Борисов
Александр Геннадьевич Кривошеев
Геннадий Иванович Мельников

ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ МЕХАНИКА
ЧАСТЬ I. КИНЕМАТИКА

Сборник заданий
для самостоятельной работы студентов

Под общей редакцией проф. Г. И. Мельникова

Учебно-методическое пособие

В авторской редакции
Компьютерный набор и верстка А.Г. Кривошеев
Дизайн обложки А.Г. Кривошеев
Зав. редакционно-издательским отделом Н.Ф. Гусарова
Лицензия ИД № 00408 от 5.11.99 г.
Подписано к печати 10.06.2002 г.
Отпечатано на ризографе. Тираж 100 экз. Заказ № 580.